

円筒の焼きばめ解析

Compound cylinder

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

円筒の内圧あるいは外圧に対する解を求める。その応用的な例題として二つの円筒が組み合わされた焼きばめの例題を取り上げ理論解と FEM 解を比較する。

理論解 中原, 実践材料力学, p.201~213 例題 1 参照⁽¹⁾。

Fig.1 に示すような A,B 組み合わされた二つの円筒がある。これらを焼きばめ（外側の円筒を温度変化）するとき作用する部材力を求める。諸元は以下の通りである。

円筒 A（内筒）の内半径 $r_1 = 50$ [mm] 外半径 $r_2 = 100$ [mm]
 円筒 B（外筒）の外半径 $r_3 = 150$ [mm] 締めしろ $\delta = 0.1$ [mm]
 温度変化 100 [°C] $\rightarrow 0$ [°C] ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5$ [MPa]

材料力学による解は以下の通りである。

弾性基礎式

- Fig.2 に示すように内半径 a 、外半径 b の薄い円板の内面に圧力 P_1 、外面に圧力 P_2 が作用する場合、内外面は $r = a$ 、 $r = b$ の円で表されるから、応力成分を極座標で表すことにすれば、Fig.3 のようになる。この微小要素 $abcd$ の力の釣り合いは

$$-\sigma_r \cdot r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta - \sigma_\theta d\theta \cdot dr = 0 \quad \dots (1)$$

- $d\theta$, dr を無限に小さくし、高次の微少量を省略して、両辺を $dr \cdot d\theta$ で割ると応力の関係式が得られる。

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad \dots (2)$$

- この式を変位で表すために、応力成分を変位で表すことを考える。円板内の各点は半径方向のみに変位するから、 r 面の半径方向変位を u 、 $(r + dr)$ 面の変位を $(r + dr)$ とすると、

$$\text{半径方向のひずみ } \varepsilon_r \text{ は, } \varepsilon_r = \frac{(u + du) - u}{dr} = \frac{du}{dr} \quad \dots (3)$$

$$\text{円周方向のひずみ } \varepsilon_\theta \text{ は } \varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad \dots (4)$$

- x, y を r, θ に置き換えた式に代入すれば

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad \dots (5)$$

- これより次のような変位の方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad \dots (6)$$

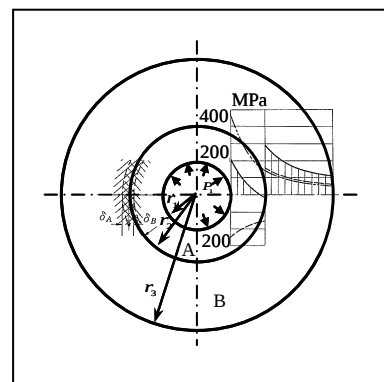


Fig.1 組み合わせ円筒

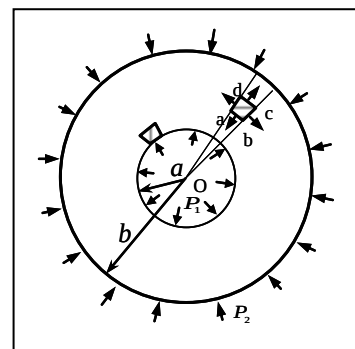


Fig.2 内外圧を受ける円板

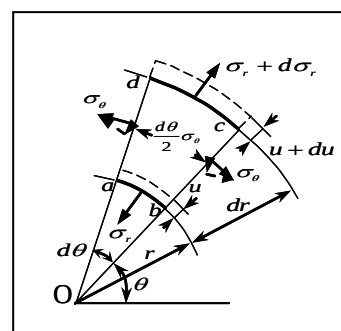


Fig.3 応力のつりあい

6. $u = r^m$ とおくと(6)式の解は

$$u = Ar + \frac{B}{r} \quad \dots (7)$$

7. (7)式を(5)式に代入すれば、応力は

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right\} \quad \dots (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right\} \quad \dots (9)$$

ここで A、B は内外面の条件によって決まる積分定数である。

8. 内外面に圧力を受ける円板の境界条件から変位、応力を求める。

微小要素 abcd の一辺が周辺曲線に一致するとき、正の σ_r の向きと正の圧力の向きとは反対になるから

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_1, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_2 \quad \dots (10)$$

9. (8)式より A、B に関する式を求め、(7)式～(9)式に代入すれば次式を得ることができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2 (p_1 - p_2)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r} \\ \sigma_r &= \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) p_2 \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left\{ \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) p_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots (11)$$

10. 次に組み合わせ円筒について考える。組み合わせ円筒とは、一つの円筒にその外径よりも小さな円筒を持つ円筒を焼きばめし、内円筒が外圧を受けた状態のものを言う。これにより内圧によって生ずる最大引張応力を小さくすることができる。

11. 焼きばめ圧力を p_0 とする。外円筒には内圧 p_0 が作用することになる。生ずる内面の変位を $u_{r=r_2} = -\delta_B$ と表わし、(11)式において $p_1 = p_0$ 、 $p_2 = 0$ とおくと

$$\frac{E}{p_0} \cdot \frac{\delta_B}{r_2} = \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu > 0 \quad \dots (12)$$

12. 内円筒には外圧 p_0 が作用することになる。そのために生ずる外面の変位を $u_{r=r_2} = -\delta_A$ と表わし、(11)式において $p_1 = 0$ 、 $p_2 = p_0$ とおくと

$$\frac{E}{p_0} \cdot \frac{(-\delta_A)}{r_2} = -\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu < 0 \quad \dots (13)$$

13. 外円筒は δ_B だけ拡がり、内円筒は δ_A だけ縮み、その和を δ とする。この関係より(13)式は

$$\frac{p_0}{E} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{r_2^3(r_3^2 - r_1^2)} \quad \dots (14)$$

14. 従って、焼きばめ圧力は

$$p_0 = \frac{(150^2 - 100^2)(100^2 - 50^2)}{100^3(150^2 - 50^2)} \times \frac{0.1}{2} \times 2 \times 10^5 = 46.9 \text{ [MPa]} \quad \dots (15)$$

解析条件

Fig.4 に解析モデルを示す。

■ 要素 : 軸対称ソリッド要素 CAX4

■ 材料定数 : ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5 [\text{MPa}]$

ポアソン比 $\nu = 0$

熱膨張係数 $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} [^{\circ}\text{C}]$

■ 温度:

	内筒[$^{\circ}\text{C}$]	外筒[$^{\circ}\text{C}$]
初期温度	0	0
温度 1	0	100
温度 2	0	0

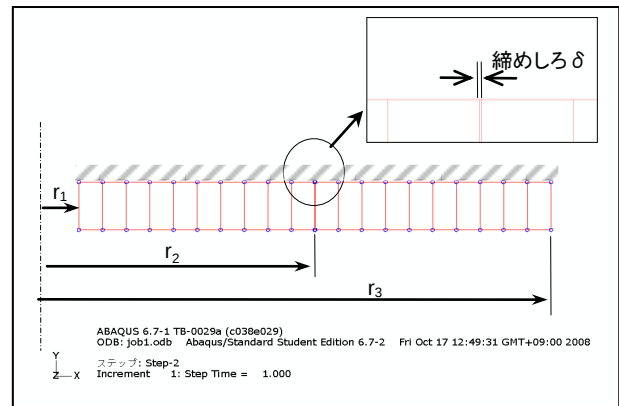


Fig.4 解析モデル

解析結果

Fig.5~11 に Abaqus の解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.1 に示す。

理論解と一致する結果が得られた。

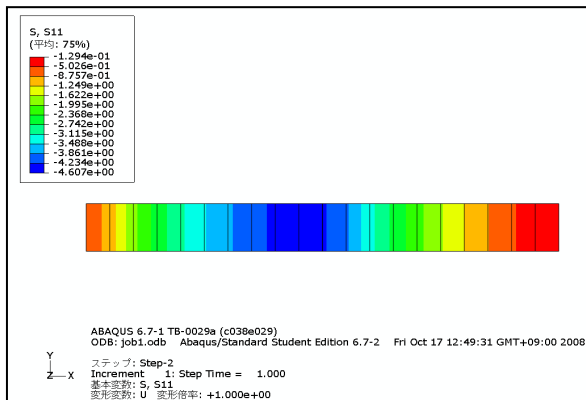


Fig.5 半径方向の応力 σ_r 分布

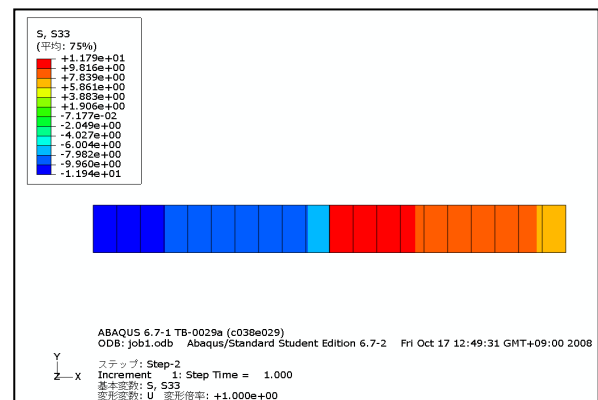


Fig.8 円周方向の応力 σ_θ 分布

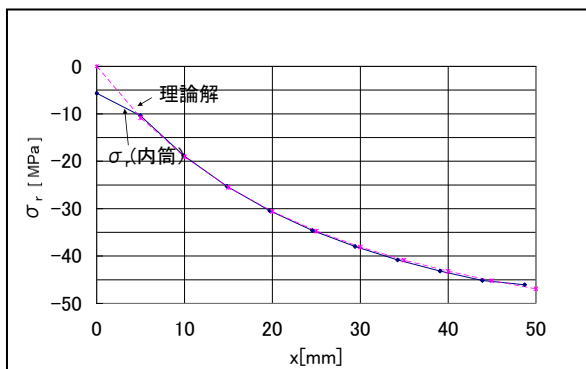


Fig.6 半径方向の応力 σ_r (内筒)

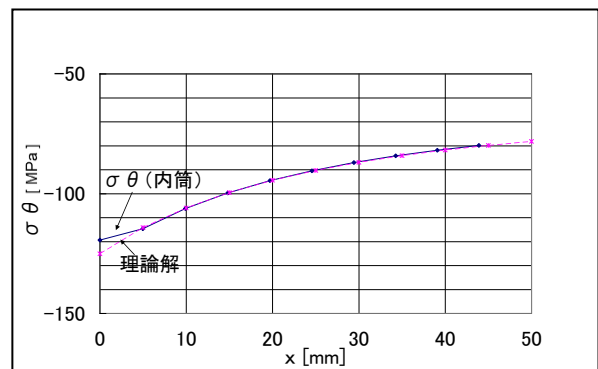


Fig.9 円周方向の応力 σ_θ (内筒)

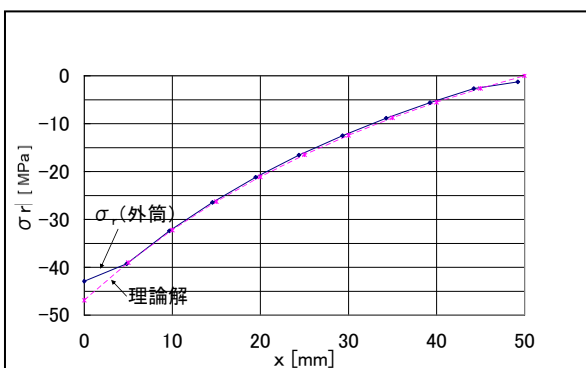


Fig.7 半径方向の応力 σ_r (外筒)

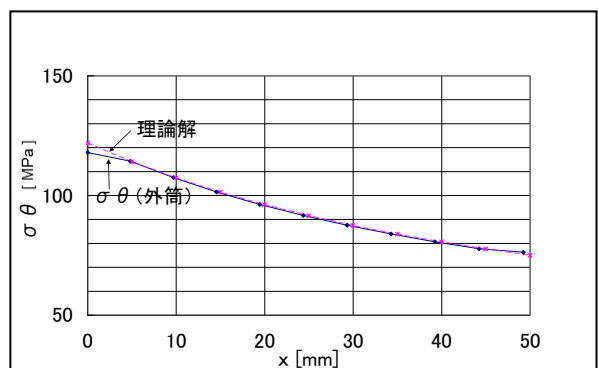


Fig.10 円周方向の応力 σ_θ (外筒)

CONTACT OUTPUT FOR SLAVE SURFACE S_IN AND MASTER SURFACE S_OUT						
	NODE	FOOT- NOTE	CPRESS	CSHEAR1	COPEN	CSLIP1
	11	CL	46.91	0.000	0.000	-1.5776E-30
	22	CL	46.91	0.000	-1.6769E-12	-9.9900E-06
MAXIMUM			46.91	0.000	0.000	-1.5776E-30
NODE			22	11	11	11
MINIMUM			46.91	0.000	-1.6769E-12	-9.9900E-06
NODE			11	11	22	22
CL: CONTACT POINT CLOSED; NO FRICTION						

接触面の圧力:Pm

接触面の圧力:Pm

Fig.11 接触面の圧力

Table.1 理論解と解析結果の比較

		理論解	FEM 解
接触面の圧力	[MPa]	46.9	46.9

参考文献

(1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>

Mechanical Design & Analysis Corporation