

主応力とモール円

Principal stress and Mohr's stress circle

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

二次元の弾性問題を対象として主応力とモール円を求め FEM 解と比較する。

理論解 中原, 実践材料力学, p.178~188 参照⁽¹⁾.

Fig.1 に示すような 2 軸応力系に対して, 主応力, 主せん断応力の大きさとそれらの作用面を求める。
諸元は以下の通りである。

$$\sigma_x = 120 \text{ [MPa]} \quad \sigma_y = 50 \text{ [MPa]} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ [MPa]} \quad \tau_{yx} = 60 \text{ [MPa]}$$

材料力学による解は以下の通りである。

【公式による解】

1. 主応力を求める。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots (1) \\ &= \frac{120 + 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120 - 50}{2} \right)^2 + 60^2} = 35 \pm 104 \\ \therefore \sigma_1 &= 139 \text{ [MPa]} \quad , \quad \sigma_2 = -69 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

2. 主応力軸を求める。

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 60}{120 + 50} = 0.706 \quad \dots (2) \\ \therefore \theta_1 &= 17^\circ 37' \end{aligned}$$

3. 主せん断応力を求める。

(1),(2)式より

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \\ \tau_2 \end{array} \right\} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) = \pm \frac{1}{2} \times (139 + 69) = \pm 104 \text{ [MPa]} \quad \dots (3) \\ \therefore \tau_1 &= 104 \text{ [MPa]} \quad , \quad \tau_2 = -104 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

4. 主せん断応力の方向 θ'_1 は主応力軸の方向 θ_1 と反時計回りに 45° をなすから

$$\theta'_1 = 45^\circ + 17^\circ 37' = 62^\circ 37' \quad \dots (4)$$

【モールの応力円による解】

1. Fig.2 に示すようなモール円を用いて図式的に求める。

P 点の横座標が垂直応力 $\sigma_{x'}$ に, 縦座標がせん断応力 $\tau_{x'y'}$ になる。

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OC} + \overline{CE} \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta = \sigma_{x'} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

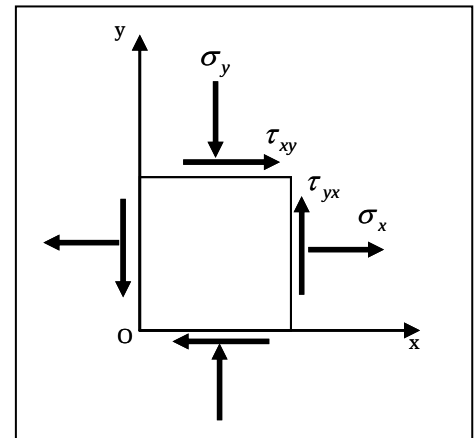


Fig.1 主応力と主せん断応力

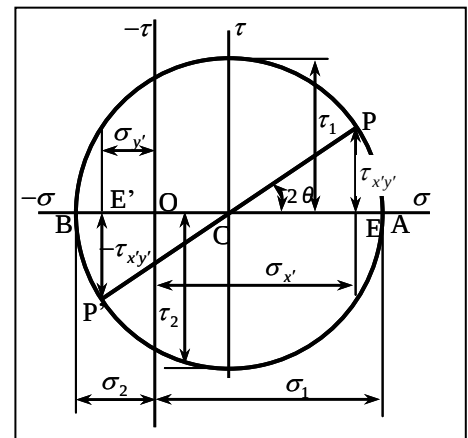


Fig.2 モールの応力円

2. また、上半面の縦座標を $-$ 、下半面の縦座標を $+$ とすれば

$$\overline{PE} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = \tau_{x'y'} \quad \dots (6)$$

3. σ_1 の作用方向から $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ のなす軸が y' であるから y' 面の応力は中心 C に関して、P 点に対称な P' 点の座標で表される。

$$\overline{OE'} = \overline{OC} - \overline{CE'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta = \sigma_{y'} \quad \dots (7)$$

$$\overline{P'E'} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = -\tau_{y'x'} \quad \dots (8)$$

解析条件

Fig.3 に解析モデルを示す。

■ 要素： CASE-1 平面応力要素 CPS4

CASE-2 三次元シェル要素 S4

■ 材料定数：ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5 [\text{MPa}]$ ポアソン比 $\nu = 0$

解析結果

Fig.4～6 に Abaqus の解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.1 に示す。

理論解と一致する結果が得られた。

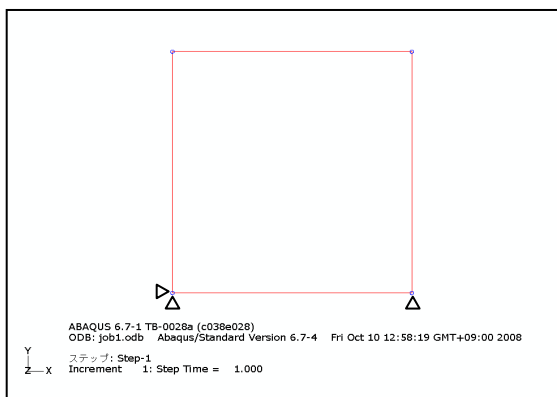


Fig.3 解析モデル

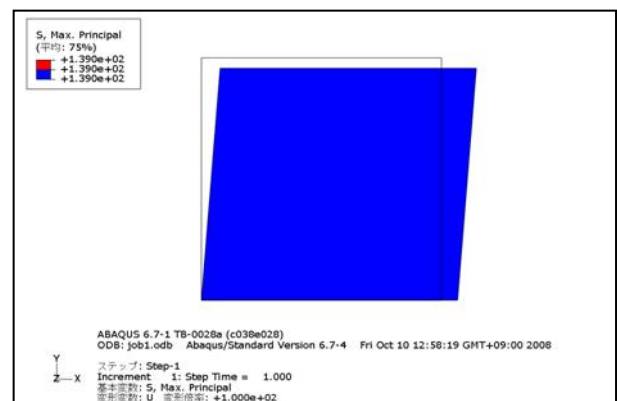


Fig.4 最大主応力 CASE-1

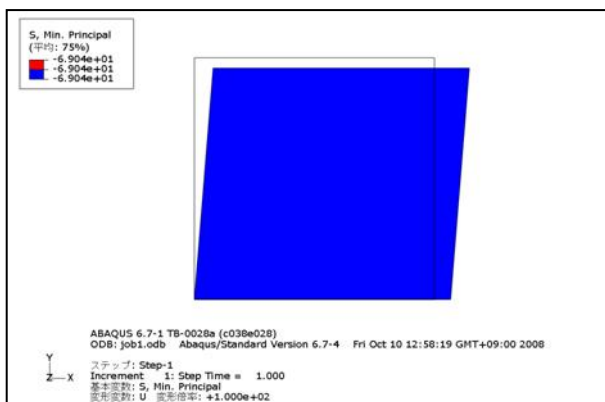


Fig.5 最小主応力 CASE-1

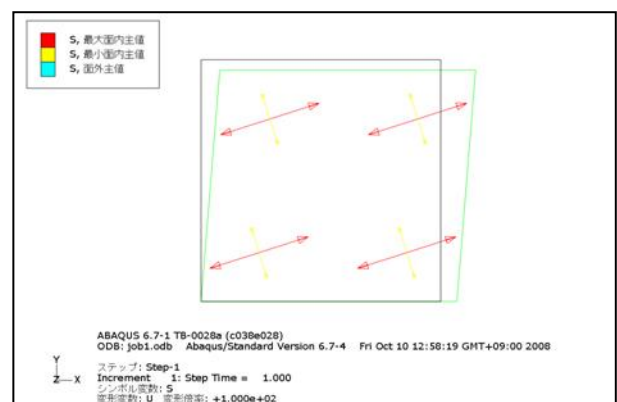


Fig.6 主応力ベクトル図 CASE-1

Table.1 理論解と解析結果の比較

		理論解	FEM 解	
			CASE-1	CASE-2
最大主応力	[MPa]	139	139	139
最小主応力	[MPa]	-69	-69	-69

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>