

集中荷重を受ける両端支持はり

Cantilever Beam with a uniform distributed load

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

現代の実用的な構造物は、強度の確保と軽量化という相反する条件を満たすために、板材や棒状の部材からなる組立構造物として設計されることが大半である。このような構造物に外力が加わると、外力の種類や方向性、また構成部材の形状と剛性に依じて、様々な変形の様態がありえる。強度評価の観点からは、その変形の様態に応じて部材を分類し、それぞれに見合った計算を行うのが合理的である。

例えば、細長い棒状の部材に外力が加わるとき、棒の軸に垂直に作用する荷重を横荷重、また棒に軸方向に作用する荷重を軸荷重と呼ぶ。横荷重を受ける棒を特にはりと呼び、材料力学の基本となる概念である。

ここでは、集中荷重を受ける両端支持はりについて理論解と FEM 解析の結果を比較検証する。

集中荷重を受ける両端支持はり・理論解 中原, 実践材料力学, p.67 例題5 参照⁽¹⁾

Fig.1 に示すような両端を支持されたはりに集中荷重を加える。このときはりに発生する ①せん断力, ②曲げモーメント, ③たわみ, ④たわみ角を求める。諸元は以下の通りである。

はりの長さ $l = 1000$ [mm] 断面 $A = 10$ [mm]×10 [mm]

はりの区間 $a = 600$ [mm] $b = 400$ [mm]

ヤング率 $E = 200$ [GPa] 荷重 $P = 200$ [N]

材料力学による解は以下の通りである。

1. ①せん断力を求める。

$$\text{・AC間 } (0 < x < a) \quad Q = R_1 = \frac{b}{l} P = \frac{400}{1000} \times 200 = 80.0 \text{ [N]} \quad \dots (1)$$

$$\text{・CB間 } (a < x < l) \quad Q = -R_2 = -\frac{a}{l} P = -\frac{600}{1000} \times 200 = -120.0 \text{ [N]}$$

$\dots (2)$

2. ②曲げモーメントを求める。

$$\text{・AC間 } (0 < x < a) \quad M = R_1 x = \frac{b}{l} x P \quad \dots (3)$$

$$\text{・CB間 } (a < x < l) \quad M = R_2(l - x) = \frac{a}{l}(l - x)P$$

$$M_{\max} = M_{x=a} = \frac{ab}{l} P = \frac{600 \times 400}{1000} \times 200 = 48.0 \times 10^3 \text{ [N]} \quad \dots (4)$$

3. 曲げモーメントがAC間, CB間で異なるため、それぞれについて微分方程式を解く。

$$\text{・AC間} \quad -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = P \frac{b}{l} x \quad \dots (5)$$

$$\text{・CB間} \quad -EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} = P \frac{a}{l}(l - x) \quad \dots (6)$$

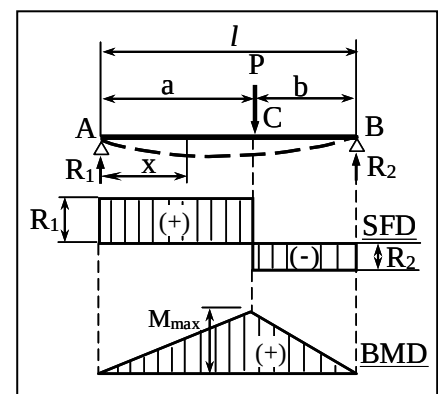


Fig.1 集中荷重を受ける
両端支持はり

4. 境界条件

$$w_{x=0} = 0, \quad (w_1)_{x=l} = 0 \quad \dots (7)$$

$$w_{x=a} = (w_1)_{x=a}, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=a} \quad \dots (8)$$

5. ③たわみを求める.

(5)～(8)式より たわみ w , w_1 は

$$w = -\frac{P}{6EI} \cdot \frac{b}{l} x(x^2 - 2al + a^2) \quad (x \leq a) \quad \dots (9)$$

$$w_1 = -\frac{P}{6EI} \cdot \frac{a}{l} (l-x)(x^2 - 2lx + a^2) \quad (x \geq a) \quad \dots (10)$$

6. 最大たわみを求める.

$a > b$ のとき, 最大たわみは AC 間で生じる. たわみが最大となる点では, たわみ曲線の傾きが x 軸に平行になるため, $dw/dx = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}} < a \quad \therefore w_{\max} &= \frac{P}{EI} \cdot \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{l} (l^2 - b^2)^{3/2} \\ &= \frac{200}{2 \times 10^5 \times 833.3} \times \frac{1}{9\sqrt{3}} \times \frac{400}{1000} \times (1000^2 - 400^2)^{3/2} = 23.7 \text{ [mm]} \quad \dots (11) \end{aligned}$$

7. ④たわみ角を求める.

たわみ角は $x = l$ のとき最大で

$$\theta_{\max} = -\frac{P}{EI} \left(\frac{al}{6} - \frac{a^3}{6l} \right) = -\frac{200}{2 \times 10^5 \times 833.3} \left(\frac{600 \times 1000}{6} - \frac{600^3}{6 \times 1000} \right) = -7.68 \times 10^{-2} \text{ [rad]} \quad \dots (12)$$

解析条件

■ 要素 : 平面はり要素 B21

■ 材料定数 : ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5$ [MPa]
ポアソン比 $\nu = 0$

■ 荷重 : 集中荷重 $P = 200$ [N]

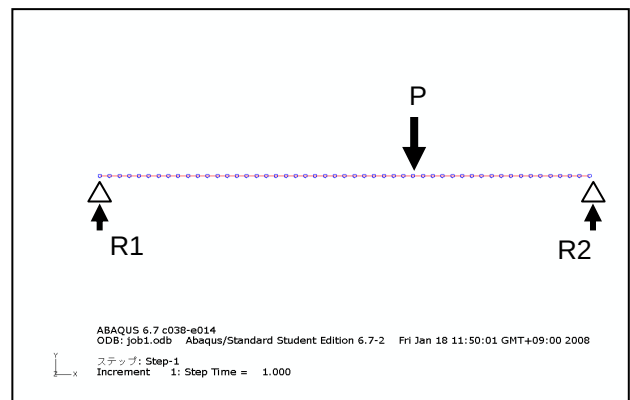


Fig.2 解析モデル

解析結果

Fig.3～Fig.6 に Abaqus による解析結果を示す. また得られた結果をまとめて Table.1, Table.2 に示す.

理論解に一致する解析結果が得られた。

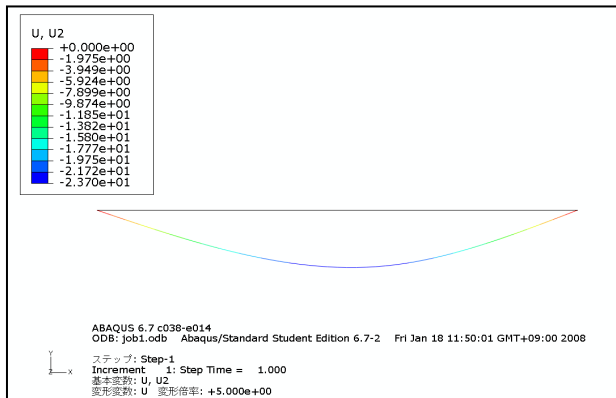


Fig.3 変形図 (たわみ w)

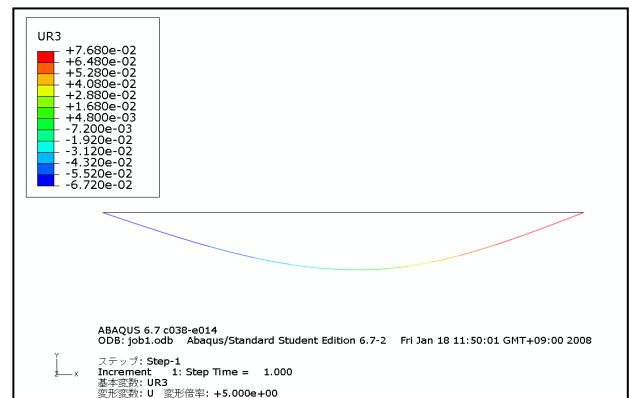


Fig.4 変形図 (たわみ角 θ)

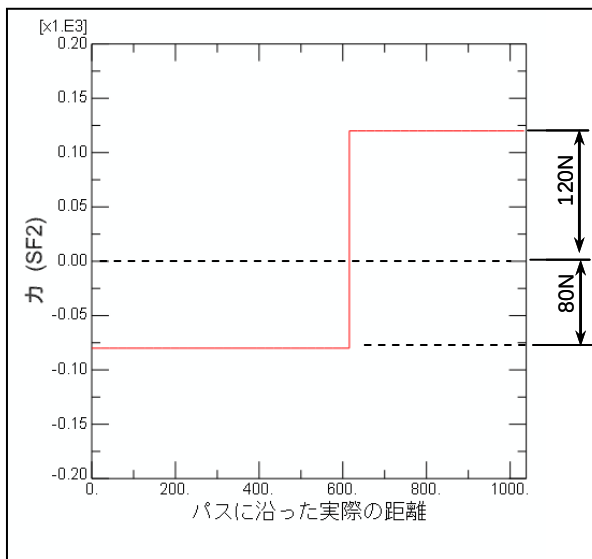


Fig.5 せん断力図(SFD)

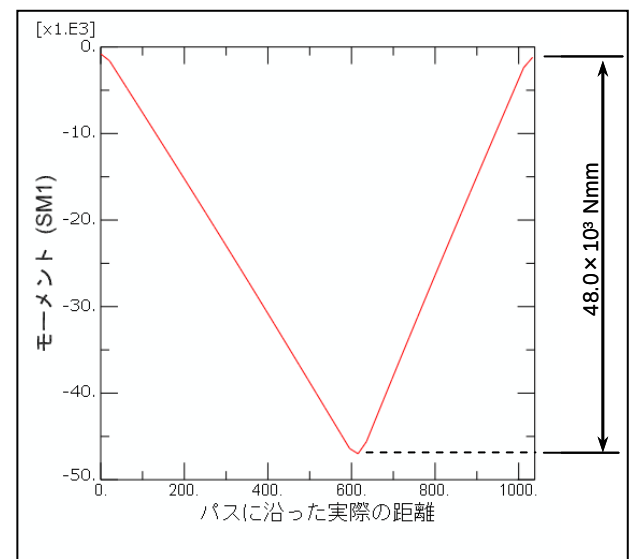


Fig.6 曲げモーメント図(BMD)

Table.1 理論解と解析結果の比較 (たわみとたわみ角)

		理論解	FEM 解
最大たわみ	[mm]	23.7	23.7
最大たわみ角	[rad]	7.68×10^{-2}	7.68×10^{-2}

Table.2 理論解と解析結果の比較 (せん断力と曲げモーメント)

		理論解	FEM 解
せん断力	[N]	80.0	80.0
		120.0	120.0
曲げモーメント	[Nmm]	48.0×10^3	48.0×10^3

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>

Mechanical Design & Analysis Corporation