

はりの曲げ問題・先端に集中荷重を受ける片持ちはり

Deflection of Beams / Cantilever Beam with a concentrated load at the end

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

現代の実用的な構造物は、強度の確保と軽量化という相反する条件を満たすために、板材や棒状の部材からなる組立構造物として設計されることが大半である。このような構造物に外力が加わると、外力の種類や方向性、また構成部材の形状と剛性に応じて、様々な変形の様態がありえる。強度評価の観点からは、その変形の様態に応じて部材を分類し、それぞれに見合った計算を行うのが合理的である。

例えば、細長い棒状の部材に外力が加わるとき、棒の軸に垂直に作用する荷重を横荷重、また棒に軸方向に作用する荷重を軸荷重と呼ぶ。横荷重を受ける棒を特にはりと呼び、材料力学の基本となる概念である。

ここでは、はりの基本的な性質をまとめるとともに、先端に集中荷重を受ける片持ちはりについて理論解と FEM 解析の結果を比較検証する。

せん断力と曲げモーメント 中原, 実践材料力学, p.36 参照⁽¹⁾

$$P = \int_A \tau dA$$

$$Pa = \int_A z \sigma dA$$

$$Q = P$$

$$M = Pa$$

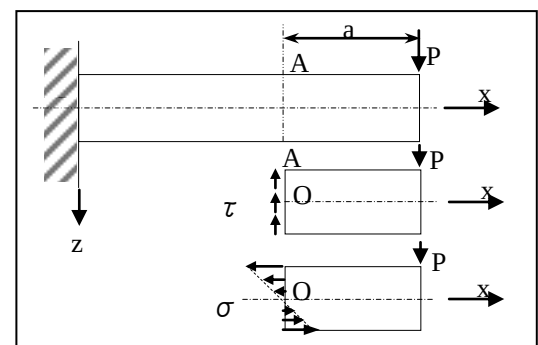


Fig.1 せん断応力と曲げ応力

(a) せん断力の符号

(b) 曲げモーメントの符号

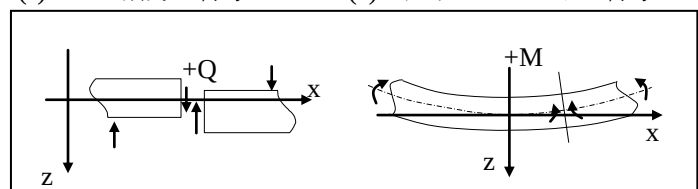


Fig.2 せん断力と曲げモーメントの符号

たわみ曲線の微分方程式 中原, 実践材料力学, p.62 参照⁽¹⁾

1. はりの軸方向の微小長さ ds を曲率半径 R で表すと

$$ds = -R d\theta \quad (ds > 0, d\theta < 0) \quad \cdots (1)$$

2. したがって P 点の曲率は

$$\frac{1}{R} = \frac{(-d\theta)}{ds} \quad \dots (2)$$

3. ここで仮定として、はりの軸にある P 点の接線と x 軸とのなす角 θ が微小であるとする、 ds はその x 成分である dx にほぼ等しく、また、 θ は $\tan\theta$ とほぼ等しい

$$ds \doteq dx, \quad \theta \doteq \tan\theta = \frac{dw}{dx} \quad \dots (3)$$

4. (2)式より

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad \dots (4)$$

5. (4)式を「曲げモーメントと曲率の関係」を使って表すと

$$\text{たわみ曲線の微分方程式} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \dots (5)$$

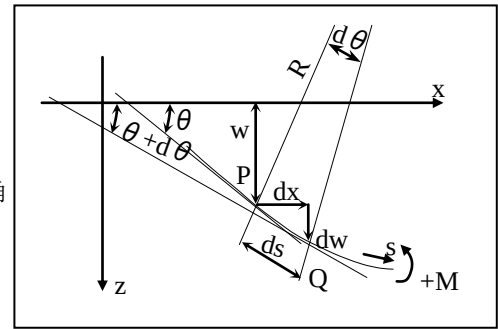


Fig.3 たわみ曲線

先端に集中荷重を受ける片持ちはり・理論解 中原, 実践材料力学, p.63 例題1 参照⁽¹⁾

Fig.4 に示すような片端を固定されたはり（片持ちはり）の先端に外力を加える。このときはりに発生する 1. せん断力, 2. 曲げモーメント, 3. たわみ, 4. たわみ角を求める。諸元は以下の通りである。

はりの長さ $l = 1000$ [mm] 断面 $A = 10$ [mm]× 10 [mm]
 ヤング率 $E = 200$ [GPa] 外力 $P = 10$ [N]
 断面二次モーメント $I_0 = 833.3$ [mm⁴]

材料力学による解は以下の通りである。

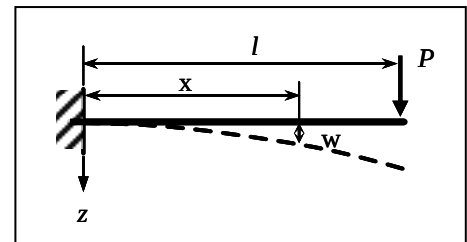


Fig.4 先端に集中荷重を受ける片持ちはり

1. せん断力 $Q = P = 10.0$ [N] $\dots (6)$

2. 曲げモーメント $M = -P(l - x) = -10 \times 1000 = -10.0 \times 10^3$ [Nmm] $\dots (7)$

3. たわみ $w_{\max} = w_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{-10 \times 1000^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 833.3} = -20.0$ [mm] $\dots (8)$

4. たわみ角 $\theta_{x=l} = \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{-10 \times 1000^2}{2 \times 200 \times 10^3 \times 833.3} = -0.03$ [rad] $\dots (9)$

解析条件

Fig.5 に解析モデルを示す。

■ 要素：平面はり要素 B21

■ 材料定数：ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5$ [MPa] ポアソン比 $\nu = 0$

■ 荷 重：集中荷重 $P = 10$ [N]

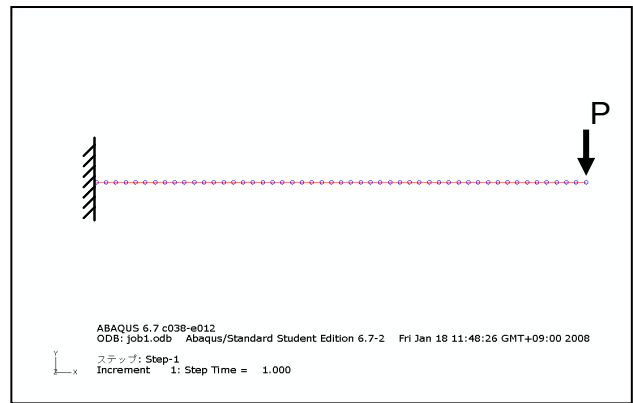


Fig.5 解析モデル

解析結果

Fig.6～Fig.9に Abaqus による解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.1, Table.2 に示す。理論解に一致する解析結果が得られた。

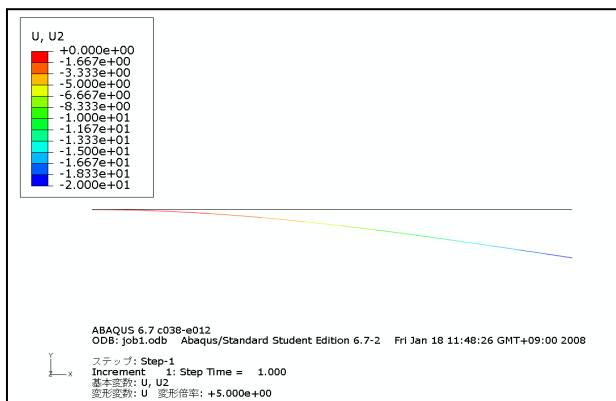


Fig.6 変形図 (たわみ w)

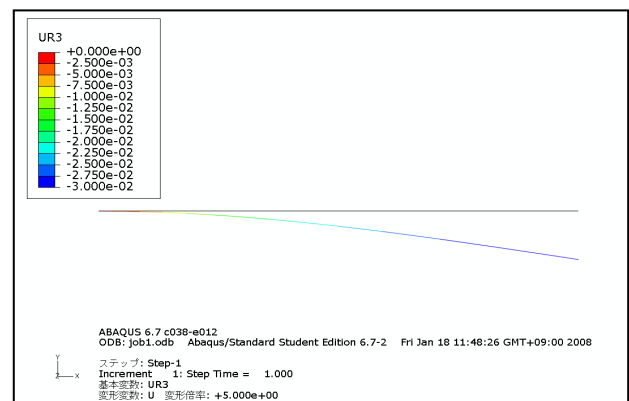


Fig.7 変形図 (たわみ角 θ)

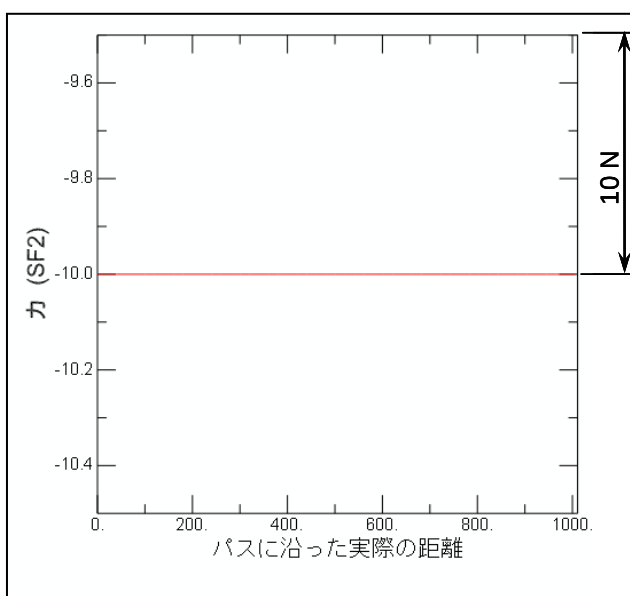


Fig.8 せん断力図(SFD)

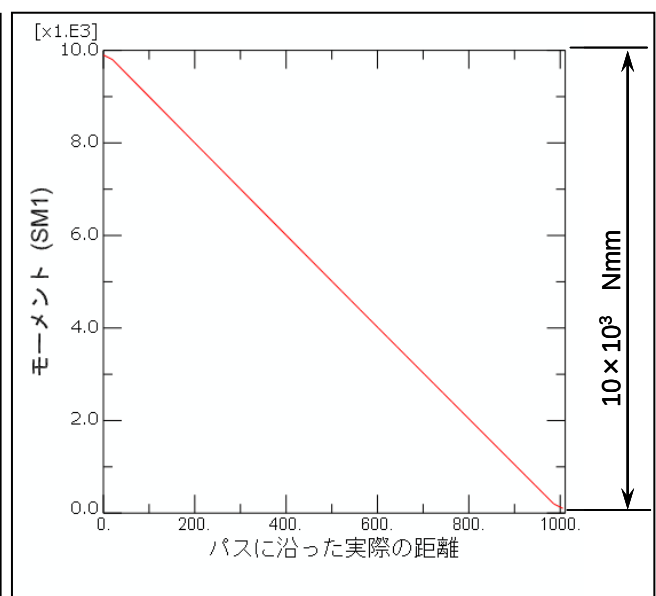


Fig.9 曲げモーメント図(BMD)

Table.1 理論解と解析結果の比較
(たわみとたわみ角)

	理論解	FEM解
最大たわみ [mm]	20.0	20.0
最大たわみ角 [rad]	-0.03	-0.03

Table.2 理論解と解析結果の比較
(せん断力と曲げモーメント)

	理論解	FEM解
せん断力 [N]	10.0	10.0
曲げモーメント [Nmm]	-10.0×10^3	-10.0×10^3

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>