同心に配置された円柱と円筒（不静定問題）

Typical Statically Indeterminate Problem

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★
提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

物体内の任意の面に生ずる応力と，外力のつり合いから，応力をただちに求められる問題を静定問題と呼ぶ．これに対して，力のつり合いのみによっては応力が定まらない問題を不静定問題と呼ぶ．ここでは不静定問題の簡単な例として，同心に配置された円柱と円筒に同時に圧縮を加える問題を取り上げ，理論解と FEM 解析の結果を比較検証する．

理論解　中原，実践材料力学，p.26 例題 6 参照[1].

Fig.1 に示すような同心に配置された同じ長さの円柱と円筒が，剛体板を介して圧縮荷重を受けるとき，発生する応力と変位を求める．諸元は以下の通りである．

円柱：直径 $d_1 = 100$ [mm]　　ヤング率 $E_1 = 70$ [GPa]
円筒：外径 $d_2 = 150$ [mm]　内径 $d_{2'} = 120$ [mm]　　ヤング率 $E_2 = 70$ [GPa]
長さ $l = 100$ [mm]　　荷重 $P = 5$ [kN]

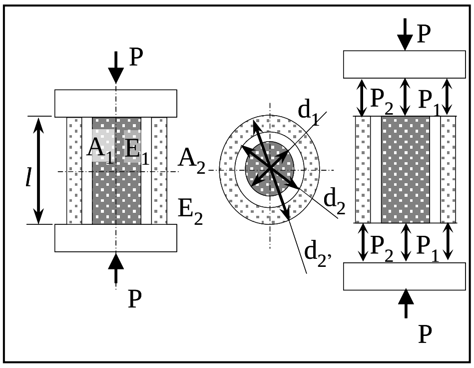

Fig.1　同心に配置された円柱

材料力学による解は以下の通りである．

1. 剛体板によって円柱と円筒が圧縮荷重 P_1, P_2 を受けているとすれば，剛体板に作用する力の釣り合いより

$$P = P_1 + P_2 \qquad \cdot\cdot\cdot(1)$$

2. このときに生ずる円柱，円筒の縮みを λ_1, λ_2 とすると

$$\lambda_1 = \frac{P_1 l}{A_1 E_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{P_2 l}{A_2 E_2} \qquad \cdot\cdot\cdot(2)$$

3. $\lambda_1 = \lambda_2$ でなければならないので

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \qquad \cdot\cdot\cdot(3)$$

4. (1), (3)式より，円柱，円筒に生ずる応力 σ_1, σ_2 を求めると

$$P_1 = \sigma_1 = \frac{A_1 E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \quad , \quad P_2 = \sigma_2 = \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \qquad \cdot\cdot\cdot(4)$$

5. ここで，円柱および円筒の断面積 A_1, A_2 は

$$A_1 = \frac{\pi d_1^{\,2}}{4} = 7854 \quad \left[\mathrm{mm}^2\right] \quad , \quad A_2 = \frac{\pi d_2^{\,2}}{4} - \frac{\pi d_{2'}^{\,2}}{4} = 6362 \quad \left[\mathrm{mm}^2\right] \qquad \cdot\cdot\cdot(5)$$

6. よって，(4)式より

$$P_1 = \sigma_1 = \frac{7854 \times 70 \times 10^3}{7854 \times 70 \times 10^3 + 6362 \times 70 \times 10^3} \times 5000 = 2762 \quad [\mathrm{N}]$$

$$P_2 = \sigma_2 = \frac{6362 \times 70 \times 10^3}{7854 \times 70 \times 10^3 + 6362 \times 70 \times 10^3} \times 5000 = 2238 \quad [\mathrm{N}] \qquad \cdot\cdot\cdot(6)$$

7. 一方，縮み量 λ_1，λ_2 は　(2)式より

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{Pl}{A_1E_1 + A_2E_2} = \frac{5000\times100}{7854\times70\times10^3 + 6362\times70\times10^3} = 5.02\times10^{-4}\ [\mathrm{mm}] \qquad \cdots(7)$$

解析条件

Fig.2 に解析モデルを示す．

■　要　　素：軸対称ソリッド要素　CAX4

■　材料定数：ヤング率　$E = 7.0\times10^4$ [MPa]

　　　　　　ポアソン比 $\nu = 0.3$

■　荷　　重：変位量　$\delta = 2.51\times10^{-4}$ [mm] (1/2 縮み量)

題意では荷重を与えて変位を求めることになっているが，上記の理論解からわかるように，荷重は円柱と円筒のそれぞれに異なった値が与えられる．そこで，解析では理論解に与えられた圧縮変位（円柱と円筒で共通）を強制変位としてモデルに与え，得られる反力が理論解の荷重に一致することを確認した．

解析結果

Fig.3 に変位，Table.1 に反力の解析結果を示す．また得られた結果をまとめて Table.2 に示す．理論解に一致する解析結果が得られた．

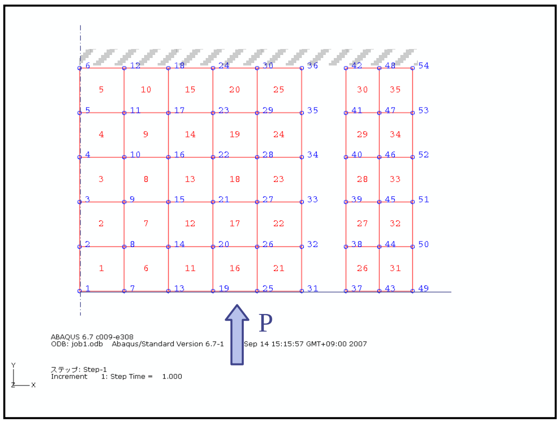

Fig.2　解析モデル

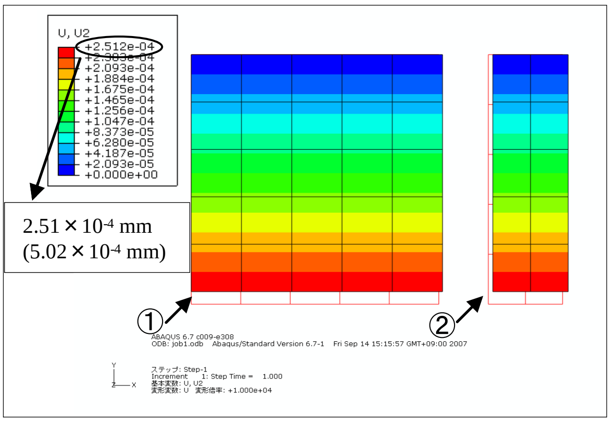

Fig.3　変位 δ（1/2 縮み量）

Table.1　Abaqus の反力の出力

```
                                 N O D E   O U T P U T

   THE FOLLOWING TABLE IS PRINTED FOR NODES BELONGING TO NODE SET RND_LEFT1

       NODE FOOT-    RF1          RF2
            NOTE                                  反力
①          1        0.000        2762.

   MAXIMUM          0.000        2762.           2762.
   AT NODE              1            1

   MINIMUM          0.000        2762.
   AT NODE              1            1

   THE FOLLOWING TABLE IS PRINTED FOR NODES BELONGING TO NODE SET RND_LEFT2

       NODE FOOT-    RF1          RF2
            NOTE                                  反力
②         37        0.000        2237.

   MAXIMUM          0.000        2237.           2237.
   AT NODE             37           37

   MINIMUM          0.000        2237.
   AT NODE             37           37
```

Table.2　理論解と解析結果の比較

	理論解	FEM解
円柱の反力［N］	2762	2762
円筒の反力［N］	2238	2237

参考文献

(1) 中原，実践材料力学，養賢堂，2002.

※　Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン
〒182-0024　東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
TEL 042-482-1539　FAX 042-482-5106
E-mail：comm@mech-da.co.jp　https://www.mech-da.co.jp