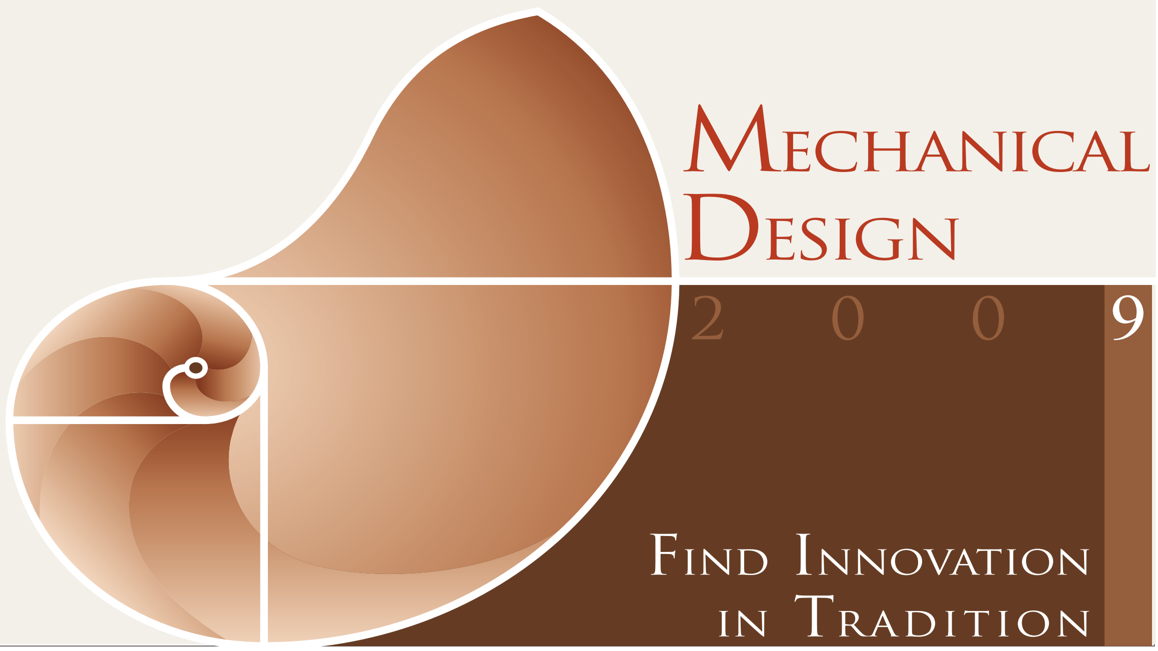
vol. 2009-2

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.
August 2009

July 9, 2009 Tokyo Conference Center

Mechanical Design 2009
The 2nd Mech D&A Users' Conference



【特集】 連続体力学の学び方

FEM Consulting Services for Engineering Practice
Find Innovation in Tradition 2008-2019

連続体力学の学び方

東北大学大学院工学研究科　京谷孝史

【１】 はじめに

私はミシガン大学の菊池昇教授が設立した非線形 CAE 協会という NPO 法人の活動に参加しており，毎年，東京と名古屋で開いている勉強会において基礎的な連続体力学の講義をする役目を仰せつかっています．この NPO 法人はメカニカルデザインさんに事務局を引き受けていただいており，そのつてもあって，連続体力学の学び方・・・のようなテーマで話を，と言われお引き受けした次第です．

しかし，引き受けたところまではよいのですが，いざ，〇〇の学び方という題でどんな話をしようかと考え始めてハタと困ってしまいました．世にこの類の本が氾濫しておりますが，そんな本を何度か本屋で立ち読みしたときのことを思い返すと，中味をパラパラと拾い読みして「独りよがりで勝手なことを言っているなぁ・・・こんな本を読む時間があったら実際の参考書を勉強した方がよっぽどいいなぁ・・・」と，手に取ってはすぐに本棚に戻すことを繰り返したネガティブな記憶しかありません．

考えてみれば，本来「学ぶ」とは自分が欲する知識や理論体系を会得するための工夫と実践であり，その方法論は一人一人異なって当然のものです．他人からああしろ，こうしろと言われる類のものではありません．今回頂いたお題について考えて，そのことに改めて思い至りました．しかし，だからといって「みなさん．そういうわけで勉強は自分で工夫してやるものです．それが学び方です．これでお終い・・・」という訳にもいきません．

そこで，今回は「ああしろ，こうしろ，こうやるべき・・・」というのではなく，連続体力学をマスターしたいと考えている人が学び方を工夫する際のヒントになるようなことをお話しさせて頂こうと思います．敵を知れば百戦危うからずという言葉があります．これからお話しすることは，連続体力学という敵の概形であり，敵のクセであり，一人で教科書と対峙する際の立ち位置や姿勢の取り方と言えばよいでしょうか．それは大学院での講義や非線形 CAE 協会での講義において，私自身が理論の細々としたこと以前に伝えたいと思っていることでもあります．

【２】 「連続体力学」とはだいたいこんなもの・・・

みなさんがこれから連続体力学を学ぼう（再学習しよう）というときには，仕事の合間や休みの日に時間を取って適当な教科書を読み進めるというのが基本的なスタイルでしょう．それで，教科書を読み進める際に「へえ，連続体力学って，そんなもんなんだ」とちょっと知っておくと理解の助けになると思われることを以下に述べます．

2.1 力学の論理と数学の論理の混在

連続体力学の文脈は数式を用いて綴られます. それは, 数式は万国共通語であり, しかも数式によって記述することで, 数学の法則に従って曖昧さを排除して演繹的に論理を展開できるからです.

連続体力学は次のような手順で現象を扱います．まず，現象に現れる物理量を数量に抽象化します．そして，それら物理量が従う法則をその数量を用いた数式によって記述します．こうして，いったん数式として表された法則は数学の論理に従って展開されて最終的に別の数式に帰着します．そして，その結論として得られた数式を再び物理の言葉に翻訳することで，現象の理解や予測に用います．すなわち，

（1）現象の観察と物理量の抽出（力学の論理）
（2）抽出量の適切な数量表現（数学の論理）
（3）現象を支配する力学法則の抽出（力学の論理）
（4）その法則の数式による記述（数学の論理）
（5）数式の展開（数学の論理）
（6）結論として得られた数式の物理の言葉への翻訳（数学の論理，力学の論理）
（7）現象の理解や予測（力学の論理）

というように，力学的視点に立った現象観察からスタートして，数式という車に乗って数学の小径を進み，そしてまた力学に戻って現象理解というゴールに至るのです.

こうした力学と数学の論理が混在するプロセスが連続体力学の文脈を構成していることを知っておくべきです．初学者はこのことを明示的に意識していないため，連続体力学の文脈を追いかける中で，知らず知らずのうちに力学と数学の論理をゴチャゴチャにして眺めてしまい，そのうちに自分がわからないのは力学なのか数学なのか，それすらわからない"何がワカラナイのかワカラナイ状態"に陥ってしまいがちです.

しかし，連続体力学の文脈は本来的にそういうものであると認識し，力学の論理と数学の論理をメリハリをつけて区別する態度を忘れなければ，連続体力学の学習はスムーズに進むでしょう．教科書を読み進めるうちに「ん？」となることに出会ったとき，自分がわからないのは力学なのか数学なのかを知れば，解決への筋道は自ずと明らかになるからです.

*本稿は，株式会社メカニカルデザイン第２回ユーザ会・Mechanical Design 2009 の基調講演として東北大学・京谷孝史教授に用意いただいた原稿のうち，その予稿を取りまとめたものである．参加の皆様への感謝とあわせ，改めて感謝の意を申し上げる．

2.2 物理量のテンソル特性と数量化．数式による法則の記述

現象の中に潜んでいる物理量には，それが「三次元空間の方向の情報をいくつ内包しているか」という固有の特性が見出されます．それを量のテンソル特性といいます．例として，ピッチャーが投げたボールを考えます．空間を移動するボールに付随する物理量としては，まず，ボールの質量が見出されます．質量は大きさだけが問題となる量であり空間の方向の情報を含んでいません．そのような量はゼロ階のテンソル量といいます．ゼロ階のテンソル量はスカラー（実数）によって数量化されます．

ボールはキャッチャーミットめがけて移動しています．その速度は大きさだけでなく方向も内包した量です．すなわち，速度は方向の情報を一つ内包した量です．そのような量は一階のテンソルです．一階のテンソルは矢印ベクトルによって数量化されます．また，現象中には，一階のテンソル量が別の一階テンソル量に変換される関係が見出されます．その変換を司る作用素が二つの方向の情報を内包する二階のテンソル量です．応力テンソルやひずみテンソルは二階テンソルとして数量化されます．同様に，n 個の方向の情報を含む量は n 階テンソルとして数量化されます．

こうして現象中の物理量を数量化した後，それらが従う物理法則がそれら数量を用いた数式で記述されます．その数式では，例えばニュートンの運動法則の f=ma のように，一階以上のテンソル量がボールド体で表示されます．ここで，認識しておくべき事は，この段階の数式は万国共通の言語であって，定量計算できるものではないということです．この数式は「f という力を表す一階テンソル（ベクトル）は,質量 m を比例係数として加速度を表す一階テンソル a と比例関係にある.」と日本語に翻訳して読めばよいのです．何か式が示されるとすぐに頭の中で計算らしきことを始める人がいますが，それはやめましょう．

数量表現されている量はそのまま「まるごとの量」としてボンヤリと眺めれば良いのです．数式を日本語に翻訳して納得すればよいのです．それは曖昧さを排除した言葉（数式）による物理法則の表現にすぎないからです．

2.3 連続体力学モデルの構成

（1）運動学的変数と力の変数

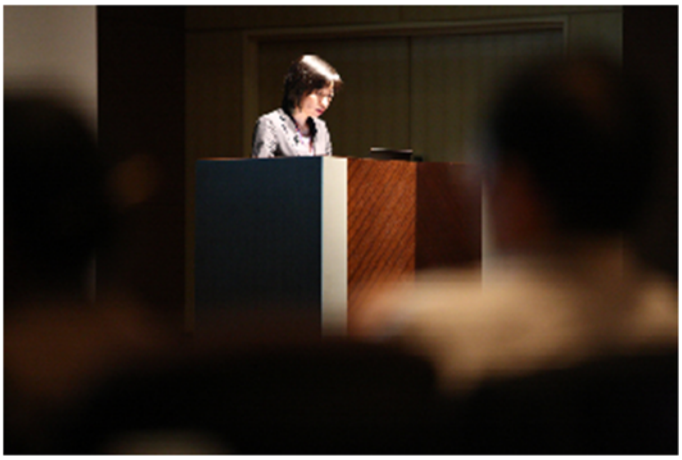
力学現象とは，現象の主体（物体）があって，それに何らかの原因（力）が働いて，その状態が変化（変形）する一連の過程です．そうした現象については，我々は「原因があって結果が生じる」という因果律に従って理解しています．したがって，力学の世界で現象を記述するに際しても，原因を記述する変数と状態変化を記述する変数の二種類を用います．

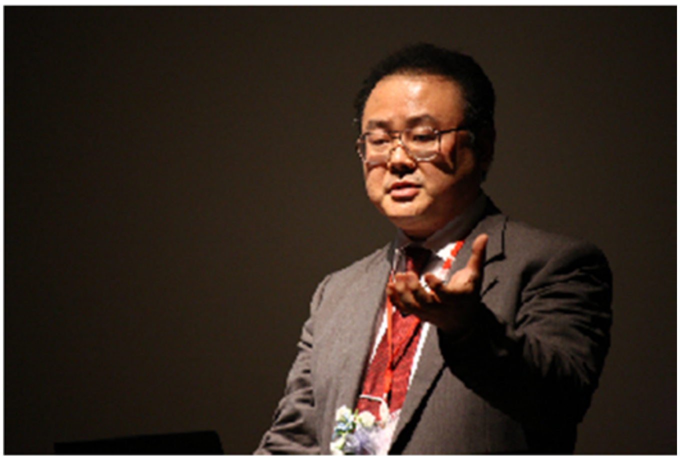
まず，状態変化を表す量を数量として抽出します．連続体力学の場合は，状態の変化とは物体の運動や変形なので運動学的変数と呼ばれます．一方，その状態変化を引き起こす原因を現象の駆動力として抽出します．それは運動学的変数に対する力の変数と呼ばれます．

例として，一本のバネを手で引っ張って伸ばすという現象を考えると，現象の主体はバネであり，観察される状態変化はバネが伸びることだから，運動学的変数としてはバネの伸びが抽出されてスカラー量 X と表されます．この伸びを引き起こす原因はバネを引っ張る力なので，それを力の変数としてスカラー量 F として表すといった具合です．また，質点に力が作用して移動する場合では，運動学的変数には移動の大きさと方向を表す変位ベクトル u，その変位を引き起こす力の変数には質点に作用する力のベクトル f が数量化されます．また，連続体力学が扱う物体の変形の問題では，運動学的変数は変形を表すひずみテンソル，対応する力の変数は応力テンソルが数量として抽出されています．

力学現象において選ばれる運動学的変数と力の変数は，必ずそのテンソル特性（階数）が同じになっています．そうなるように人為的に選ぶのではなく，現象中の量を正しく見極めて抽出すると必然的にそうなってしまうのです．
一方で，数学の世界においてはテンソルの階数に応じた内積，すなわち同じ階数の二つのテンソルから一つの実数を定める演算が定義されています．力学の世界では対応する力の変数と運動学的変数のテンソル特性は同じなので，この数学の事実を利用してそれらの内積を計算することが出来ます．その結果として得られる実数は力の変数と運動学的変数の掛け算として，仕事の意味を持つことになります．これは力学と数学の驚くべき調和です．

（2）構成則
力の作用に対する運動（変形）の現れ方は物体の性質に依存して決まります．加えられる力に対してバネがどれだけ伸びるかはバネが決めるということです．そうしたバネの特性は力と伸びの関係として具体的に現れます．力学の世界では，物体の特性を現わす力の変数と運動学的変数の応答関係を数式として記述します．それを構成則といいます．
力学の世界においては，現象の主体である物体については現象に関係する特性だけが注目されて構成則の中に表現さ





れます．バネを引き伸ばすという現象では，バネの特性を表す構成則はフック則として知られている F=kX であり， 現象の主体であるバネはその中の k という比例定数（バネ定数）として表されます．バネの材質や色，形など，現象に無関係なその他の特性は完全に無視されるのです．　構成則の中に現れる物体の特性値は材料特性パラメータと呼ばれ，通常は材料試験によって決定されます．

2.4　連続体への置き換え，　基準配置と現在配置の区別

連続体力学では，物体自身をそれが三次元空間において占める連続領域に置き換えます．連続体というのはその連続領域のことです．この連続体は物体の性質を持つ物質点がびっしりと連続的に詰まっているとされます．そして，色々な物理量はこの物質点に付随していて連続体を定義域とする関数として扱われます．ここで，やっかいなのは，これらの関数は，通常の数学の教科書にでてくるような関数とは異なり，関数自体が時間とともに変化するのみならず，関数の定義域である連続体が時間とともに変化することです．

この定義域が変化することを表現するために，連続体力学では変形前の時刻ゼロにおける連続体を基準配置，注目するある時刻での変形後の連続体を現在配置とよんで明確に区別します．そして，同じ物理量を基準配置を定義域とする関数として表したり，現在配置を定義域とする関数として表したりします．そのため，目がチカチカするような複雑さを感じるかも知れませんが，あくまでも同じ物理量に注目していることに変わりはありません．惑わされないことです．

2.5　丸ごとの量と座標の導入による数ベクトル，正方行列との対応

物理量をそのテンソル特性に応じて数量化し，それらが従う物理法則を万国共通語である数式で記述する・・・我々はそれを日本語に翻訳して理解すればよい，と先に述べました．言ってみれば，そこまでがまずは力学的な洞察による作業です．しかし，そんな数式をいくら眺めていても，それは言葉ですから定量的な計算はできません．そこで，数学における三次元ユークリッド空間の構造を利用します．

三次元ユークリッド空間とは我々が住んでいる空間のことです．三次元ユークリッド空間では適当に原点をさだめると空間内の全ての点は矢印ベクトルで表されます．そして，内積によってベクトルの長さ（あるいは２点間の距離）が定義されます．また，二つのベクトルの角度も定義され，内積がゼロとなる二つのベクトルは直交すると言われます．このような三次元ユークリッド空間では，内積で定義される長さが１で，内積がゼロになるという意味で互いに直交する３本のベクトルを任意に定めることができます．これを正規直交基底といいます．

ひと組の正規直交基底を定めると，すべてのベクトルはこの正規直交基底の一次結合で表すことが出来ます．高校の数学で習ったように，その時の三つの係数をベクトルの成分と呼び，その三成分を縦に並べてカッコでくくったものを三次元数ベクトルと呼んでいます．正規直交基底を定めることは，直交直角座標系（別名デカルト座標系）を導入することを意味し，ベクトルの三成分はその三つの座標軸への射影であることは皆さんよくご存じでしょう．

実は，このことが重要な意味を持っています．物理法則を示す数式中において，ボールド体で書かれたベクトル量（一階テンソル）は丸ごとの量として眺めるしかありません．ところが，正規直交基底を導入し座標系を設定することによって，三次元数ベクトルと一対一に対応するので，ボンヤリと眺めていただけのベクトル量について三次元数ベクトルを使った定量計算が可能になるということなのです．

同様にして，二階テンソルは直交直角座標の導入により，三次正方行列と一対一に対応して定量計算ができるようになります．さらに，それのみならず，線形代数学において三次正方行列に関して調べ尽くされている全ての数学的知識を使った分析ができることになります．例えば，コーシー応力テンソルは三次対称行列で表されますが，対称行列について成立する固有値と固有方向に関する分析ができます．それが主応力と主方向の議論に直結し，連続体内部の一点に作用する力の状態の本質を解き明かしてくれます．

このように，現象中から抽出されてボールド体で表現されるような物理量がまずは実在として存在し，そこに我々が座標系を導入するからこそ，それが定量的な数ベクトルや正方行列の形に置き換えられて定量計算ができるという認識は重要です．その認識があってこそ，注目する量に対応する数ベクトルや正方行列が座標を変えたときにどのように変化するかという座標変換則，あるいは座標変換しても変わらない種々の不変量の重要性が理解できるのです．

2.6　物理的な要請からの特殊な時間微分

連続体力学ではしばしば物理量の時間変化率に注目します．一見すると複雑な量関係も，瞬間的な時間変化率には簡単な比例関係が見出せたりするからです．その際に注目する物理量は，連続体を構成する物質点に付随しています．したがって，それら物理量の時間変化を調べる際には，どうしても連続体を構成する物質点に注目して観察することが必要になります．物質点に注目して物質点と一緒に運動しながら観察する時間変化率のことを物質時間微分といいます．物質時間微分は現象の記述という物理的な要請から出てきた微分演算であって，数学の一つの演算法としてあるものではありません．このことを知っておかないと混乱を招きます．

2.7　積分定理を利用したお決まりの式展開

上に，「連続体力学ではしばしば物理量の時間変化率に注目します．」と述べましたが，特に「現在の状態（現在配置）において連続体が有する物理量の総和の時間変化率」に注目するケースが度々あります．例えば，ニュートンの運動法則を連続体に当てはめれば，（連続体が有する運動量の総和の時間変化率）＝（連続体に作用する力の総和）というような具合です．この左辺にあるような「○○の総和」は「物質点が持つ物理量○○の現在配置にわたる積分」で与えられます．また，ここでいう「時間変化率」は必然的に連続体と一緒に運動して時間変化率を見る物質時間微分を考えることになります．したがって，運動法則の左辺は（運動量の現在配置にわたる積分量についての物質時間微分）ということになります．

このような「物理量○○の現在配置にわたる積分量についての物質時間微分」は，先に 2.4 節で述べたように，物理量○○だけではなく，積分の定義域である現在配置自体が連続体の運動・変形によって時間変化するので，具体的に式展開を進めようとすると少々やっかいです．しかし，連続体力学ではこのような数式は重要な場面でしばしば現れるので，それが「レイノルズの輸送定理」という公式になっていて，それを使った展開方法が準備されています．また，その際には「ガウスの発散定理」という偏導関数の体積積分を表面積分に書き換える定理も公式として多用されます．これらの積分定理はまさに「お決まりのこと」なので，ボールド体で記述された数式に直接適用して式展開が進められます．

先の 2.5 節では「座標を導入することによって初めて定量計算ができる」と述べましたが，その定量計算の以前に，こうした積分定理を応用した「お決まりの式展開」がしばしば行われることを知っておくと，教科書を読む進める際に混乱しないでしょう.

【３】学ぶときのメリハリ

要するに，連続体力学は

1. 言葉で命題のように書かれる物理法則を
2. 物理量を表す数量（テンソル）を用いた数式で記述して
3. 積分定理によるお決まりの式展開を経て
4. 座標の導入による定量計算を行い，得られた結果をもとに
5. 現象の理解・予測・評価をする一連のプロセスなのです.

これを会得しようと思えば，まず 1. でいう物理法則を理解する必要があります. これは直観的に理解（感覚的ということではありません！）できます. 続く 2. もテンソル量についても直観的に理解すれば，1. と合わせて，日本語で書かれた物理法則を万国共通語であるボールド表記の数式で記述することができます. 3. は，あらかじめ積分定理がどのような道具なのかを十分に理解しておけば済むことです. その際，積分定理の内容を具体的な図に描くことができるくらいにして，その図的イメージと合わせて理解しておくとよいでしょう.

4. の座標の導入による定量計算の段階では「総和規約」という強力な手法が準備されています. それに習熟すれば，鼻歌を歌いながらでもミスすることなく式展開を進めることが出来るようになります. したがって，この総和規約を使いこなせるようになるまで一定のトレーニングが必要です. 総和規約は簡単なので，自分の手を動かして教科書の式展開を納得するまで辿るうちに，知らず知らずマスターできます. そして，一番大事な 5. の現象の理解・予測・評価については，上記の 1. から 4. を会得した人ならば，自分に与えられた問題のツボを押さえてさえすれば，自然に正しい理解・予測・評価に結びつけられるでしょう.

【４】おわりに

以上，長々と述べましたが，連続体力学は論理展開の仕方にお決まりのことが多いのです. そして，それは数学を道具にして極めてカッチリとした論理体系になっています. 一つ一つの事柄の関連性が明解なので，それらを面倒がらずに理解して行くならば，自ずと体系的に整理されて頭に入ります. 敵はここでお話しさせて頂いたような特徴を持っています. それを頭の隅においておけば，比較的容易に（もちろん努力は要しますが）マスターできます. ここで述べたような視座に立って最近，「よくわかる連続体力学ノート（森北出版）」という教科書を書かせて頂きました. 参考にしていただければ幸いです.

Mechanical Design 2009
東京コンファレンスセンター
2009 年 7 月 9 日

株式会社メカニカルデザイン
東京本社
〒182-0024　東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
TEL 042-482-1539　　FAX 042-482-5106