

vol. 2004-3

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

December 2004



Renoir, Girl in a Lace Hat, 1891.

【特集】 弾性円筒シェルの変位後解析

FEM Consulting Services for Engineering Practice
URL <http://www.mech-da.co.jp>

【1】座屈後解析とその意義

現代の構造物の多くは、軽量化と高強度の実現という背反する要求を満足するために、薄板と細長部材を組合せた組立構造物として設計されます。この種の部材、すなわち代表寸法に比べて肉厚や断面積が小さい部材は、単純な引張応力の状態で使用すれば十分な強度を発揮します。しかし圧縮あるいはせん断の応力状態では、変形や外力が限界を超えると安定な平衡状態を保てなくなり、別の形をした平衡状態に移行したり、あるいは急激に変形が進み崩壊したりします。このような現象を弾性安定、あるいは慣用的に座屈と呼びます。

今回のテーマである座屈後 (Postbuckling) とは、構造物が弾性安定の臨界値を超えた後の挙動を指す用語です。代表例として Fig. 1 に示すように棒や矩形板に圧縮荷重が加わる場合を考えてみましょう。Fig. 2 はそのときの荷重と変位の関係を表す図です。図中 P_{cr} が臨界荷重の点を示し、それ以前が座屈前、それ以降が座屈後の領域です。 P_{cr} までは形状によらず荷重はほぼ直線的に増加しますが、 P_{cr} 以降の挙動は形状によって大きく異なることがわかります。

例えば棒の場合は、単純圧縮の状態では座屈を生ずると Fig. 1 (a) の右図に示すように曲げ変形の状態に移行します。この問題はエラスチカと呼ばれ、曲げによる横変位量 δ が圧縮変位量に比べて非常に大きいのが特徴です。この結果、荷重は P_{cr} のままほぼ一定に推移し、また発生する横変位量が大きいため、棒が初期において何らかのたわみ (初期不整) を有していたとしても、その影響は小さいとされています。Fig. 2 の破線はこの初期不整がある場合の挙動を示しています。座屈点の出現は初期不整によって不明瞭になりますが、最終的に荷重の大きさは P_{cr} に漸近します。

また矩形板の場合は、Fig. 1 (b) のように幅方向に単純支持した状態で一方向に圧縮すると、圧縮方向にも幅方向にも正弦的な面外変位を生じ、板の中央がはらみ出すような変形となります。有限変位の考え方によれば、この中央部のはらみ出しによって、板の側部は面外変位することなく、より大きな圧縮に対して抵抗することができるようになります。この結果、 P_{cr} を超えても更に大きな圧縮荷重を負担することができ、棒のように簡単には崩壊しません。また初期不整に対しても鈍感です。多くの組立構造物は、板のこのような性質 (有効幅の理論として知られています) を利用して座屈点以降の極限耐力を高めています。

座屈後解析は、このような最終状態での耐力を知るのと同時に、初期不整の影響を評価するために利用される手法です。今回は、棒や板に比べて大きく異なる挙動を示すと言われる円筒シェルの座屈後挙動を取上げ、ABAQUS⁽⁷⁾ の弧長法と人工粘性法を組合せて座屈後の解を見出すことを試みた結果を紹介します。

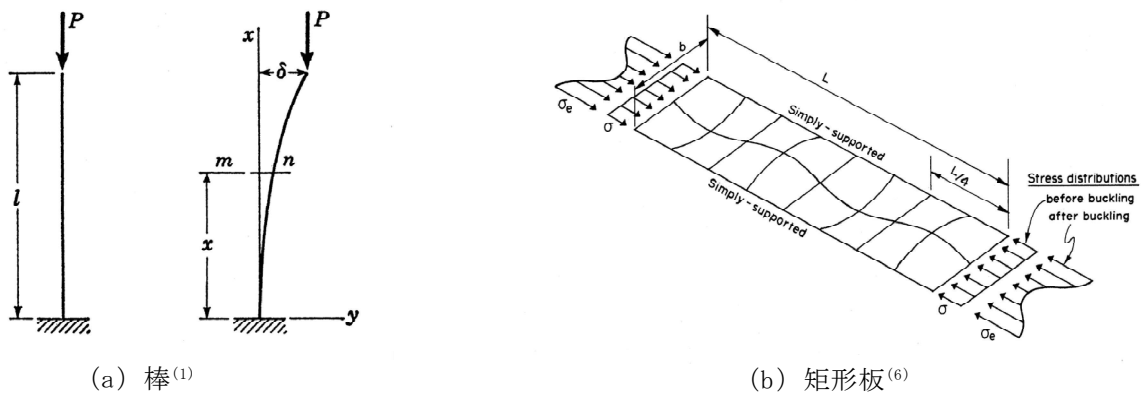


Fig. 1 圧縮による座屈の例

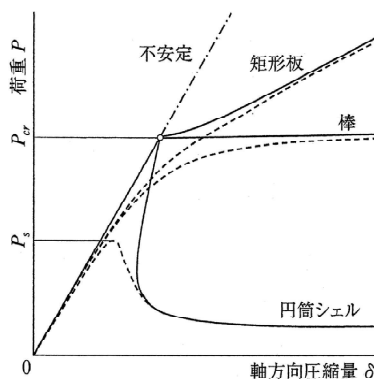


Fig. 2 棒、矩形板、円筒シェルの圧縮座屈後の荷重-変位関係⁽⁵⁾

【2】円筒の軸圧縮による座屈

円筒の軸圧縮による弾性座屈問題は、シェル座屈の基本的な問題として位置づけられ、古い時期から多くの研究が行われてきました。実際の製品の分野でも航空機の胴体、貯液槽の設計に始まり、最近では衝撃エネルギーの吸収機構などの新しい応用分野が広がっています。この問題に対する座屈臨界応力の古典的な理論解は(1)式に示されるもので、既に1910年頃にはTimoshenkoらによって導かれています⁽¹⁾。

古典的な臨界応力の理論値
$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots (1)$$

ここで E : ヤング率 ν : ポアソン比
a : 半径 h : 肉厚

(1)式は、Fig. 3に示すような軸対称の波が円筒の全長にわたって発生すると仮定して、エネルギー法により求められたものです。しかし、ここで仮定された軸対称の変形は、円筒の円周長の変化を伴ってはじめて実現できることに注意して下さい。このような部材の長さの変化を伴う座屈を伸長型の座屈と称します。

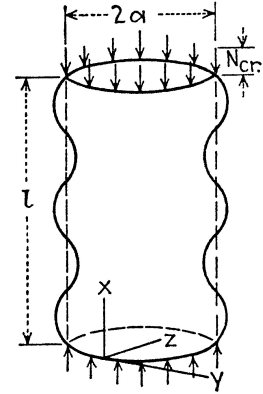


Fig. 3 円筒の軸対称（伸長型）の座屈⁽¹⁾

先のFig. 2に示した P_{cr} は、この伸長型の座屈に相当する臨界荷重です。しかし容易に推測されるように伸長変形には大きなエネルギーを必要とします。もし単純な曲げ変形のように部材の長さの変化を伴わない（不伸長の）変形への移行が許されるのであれば、伸長型の変形は、よりエネルギー水準の低いこの不伸長型の変形に乗り移ることを好みます。

この結果、円筒シェルは古典的な軸対称の座屈を生じたとしても、その後の不安定な状態の下で大幅な荷重の低下を示し、一気に崩壊に進む可能性があります。Fig. 2に示した線図は、棒や矩形板と異なるこのような円筒シェルの座屈後の挙動を概念的に示したものです。

【3】先駆的な研究

Fig. 4は航空機の胴体のような薄肉の円筒を対象として、1930年代に行われていた試験の様子を示します。(1)式に示された古典的な臨界応力が軸対称の伸長変形を想定していたのに対し、実験では明らかに円周方向の波を有する非軸対称の不伸長変形が得られていることがわかります。Fig. 5はこのような実験で得られた臨界応力と(1)式の理論解との比を示したものです。単に変形の形状が異なるだけではなく、理論解の10～60%の低い荷重にしか実際の円筒は耐えられないことがわかります。

もし円筒が完全に理想的な形状をしていれば、円筒は軸対称に変形し、古典的な臨界応力まで持ちこたえます。しかし真円度のばらつきや肉厚のばらつきのような初期不整を引金として円周方向に波が発生すると、軸対称の変形を生ずるのに必要であった円周長の伸びは解消され、より小さい荷重の水準で同じ圧縮変位の状態を維持することができ

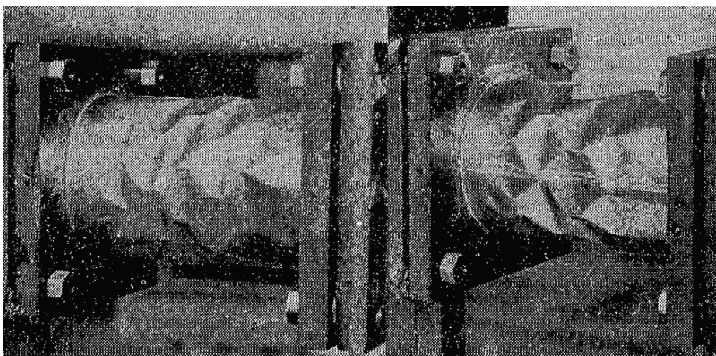


Fig. 4 円筒の非軸対称（不伸長型）の座屈^{(1),(2)}

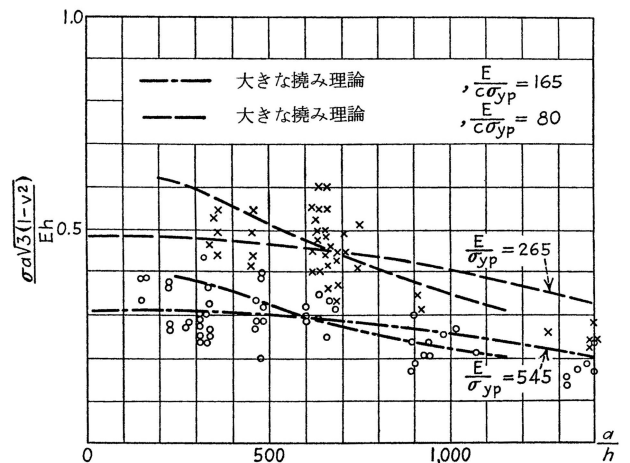


Fig. 5 臨界応力の実測値のばらつき⁽¹⁾

ようになります。当時の加工技術では、試験体から初期不整を十分に取り除くことができず、この結果、古典的な座屈モードが出現する前に非軸対称の座屈を生じてしまったと考えられます。

初期不整の存在を念頭においた円筒の座屈後の挙動は、Kármán らによって先駆的な研究が行われたと言われています。彼らは、応力関数 F を用いて円筒シェルの座屈後の方程式を(2)式のように定め、半径方向変位 w を(3)式のような波として想定することによってその解を求めました^{(1), (3)}。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad \dots (2)$$

$$\frac{w}{a} = \left(f_0 + \frac{1}{4} f_1 \right) + \frac{1}{2} f_1 \left(\cos \frac{mx}{a} \cos n\theta + \frac{1}{4} \cos \frac{2mx}{a} + \frac{1}{4} \cos 2n\theta \right) + \frac{1}{4} f_2 \left(\cos \frac{2mx}{a} + \cos 2n\theta \right) \quad \dots (3)$$

(3)式は実験結果に基づいて検討されたもので、 m, n は軸方向と円周方向の波数を代表する助変数です。また f_0, f_1, f_2 は半径方向の変位を代表する助変数です。

m と n を設定して座屈モードを仮定し、波動成分に關与しない f_0 に対するエネルギー U の微分を 0 にする条件から周方向応力の平均値が 0 となる (不伸長な) f_0 を見出し、更に U の微分を 0 にするような f_1 と f_2 を求めることで、円筒に生ずる荷重を計算できるとされています。

Fig. 6 はこのようにして求められた荷重-変位関係の一例です。図中、横軸は肉厚で無次元化された圧縮変位、縦軸は無次元化された臨界応力を示します。図中の曲線群は、円周方向の波数 n をパラメータとしたときの結果を示します。

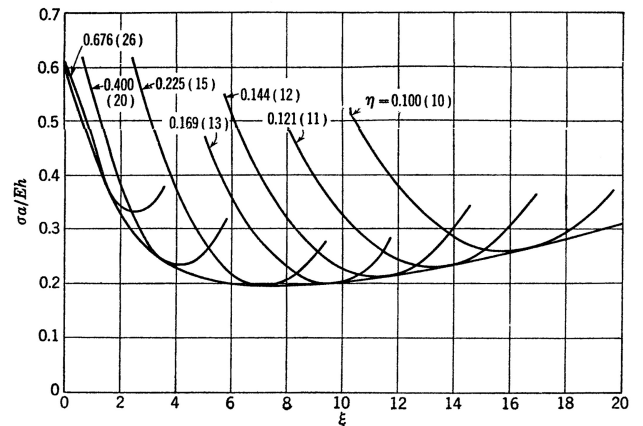


Fig. 6 円筒の座屈後の荷重-変位曲線⁽¹⁾

$$\text{無次元化された変位} : \xi = \frac{\delta}{h} \qquad \text{無次元化された円周方向波数} : \eta = \frac{n^2 h}{a} \quad \dots (4)$$

曲線に付したかつこ内の数字は $a/h=1000$ の場合の n の値です。図からわかるように曲線は下に凸となり、 n が小さいほど極小値は右側にずれます。この極小値の包絡線を描くと、図の左端、すなわち波数の大なる側の y 切片の値は、 $\nu = 0.3$ のとき以下のように 0.605 となることが導かれています。この値は(1)式に示した古典的な臨界応力に一致します。

$$\text{極小値包絡線の } y \text{ 切片} : \left(\frac{\sigma_a}{Eh} \right)_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 0.605 \quad \dots (5)$$

この Fig. 6 からは以下のようなことが推測されます。すなわち、

- 円筒に軸圧縮を加えると、まず古典的な臨界応力まで持ちこたえ軸対称の座屈を生ずる。
- しかし座屈後の不安定な状態の下では伸長変形を維持することができず、即座に円周方向に波を生じ、非軸対称の不伸長変形に転ずる。同時に荷重は低下し、変位が進行する。
- 変位が進行すると荷重は極小値を迎え上昇に転ずる。しかし、より波数の小さい座屈モードの曲線が図中の右側に隣接して存在し、同じ変位に対してはより小さい荷重を与えるために、その曲線に飛び移る。
- これが順次繰り返される。

すなわち Fig. 6 は、円筒に軸圧縮を加えると、波数の小さいモードに不連続に飛び移りながら変形が進行するという、特徴的な現象の発生を示唆しています。

【4】八巻らの知見

軸圧縮に限らず、円筒シェルの弾性座屈に関しては、東北大学の八巻らのグループに系統的な知見があります。その実験および理論の成果は成書⁽⁴⁾としてとりまとめられており、現在でも最も信頼に足る結果と考えられます⁽⁵⁾。

Fig. 7 に八巻らが使用した試験体の仕様を示します。初期不整を注意深く取り除かれたポリエステルフィルム製の円筒が使用され、端部を完全固定した状態で圧縮が加えられました。図中の表に示されるように、径が同一で高さの異なる試験体が用意されています。

Fig. 8, $\bar{\delta} = \frac{R}{Lh} \delta$ で初期の座屈（1次座屈点）を生じた後、周方向の波数を減じながら不連続に変形が推移します。また軸方向に対称あるいは非対称なモードが存在するとされており、それぞれの曲線が図中に描かれています。

図中の記号は以下の通りです。ここではZ=500の試験体に関する結果を示しています。数値解はDonnell型の方程式から出発し、座屈波形を仮定した上でガラーキソ法を用いて数値解を得たとされています。

形状パラメータ

$$Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{L^2}{Rh} = 500$$

無次元化された座屈荷重

$$\Sigma = \frac{P}{P_{cr}}$$

ただし

$$P_{cr} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1290 \text{ [N]}$$

無次元化された変位

$$\bar{\delta} = \frac{R}{Lh} \delta$$

No.	20-4	50-3	100-3	200-3	500-3	1000-3
L(mm)	22.7	35.9	51.0	71.9	113.9	160.9
Z	19.9	49.8	100.5	199.7	501.0	999.9

(R=100 mm, h=0.247 mm, E=5.56 GPa, $\nu=0.3$)

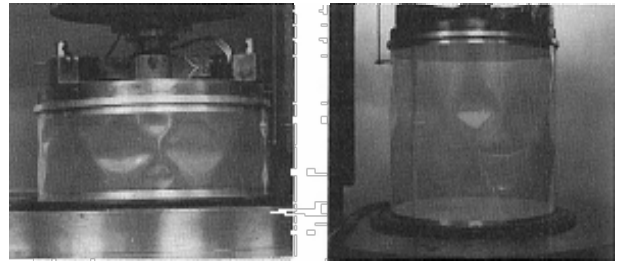
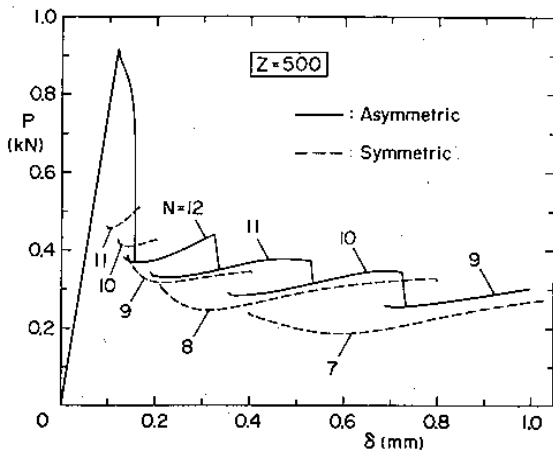
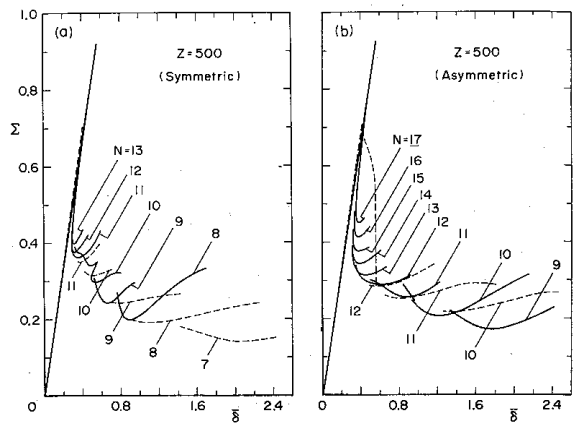


Fig. 7 試験体および座屈形状の例⁽⁴⁾



(a) 実測



(b) 数値解

Fig. 8 荷重-変位曲線⁽⁴⁾

【5】座屈固有値解析

Fig. 8 に示した八巻らによる知見をトレースする解析を行いました。Fig. 9 に解析モデルを示します。対象はZ=500の試験体とし、上半分のモデルとしました。モデルの下端面に対称条件を与え、上端面を完全固定の状態の下方向に圧縮しました。原形状は理想的な円筒形状としています。

Fig. 10 に固有値解析の結果を示します。図中の左側の (a) 図は圧縮の加わっていない初期状態において固有モードを求めた結果です。1 次モードとして波数 $N=0$ の軸対称のモードが現れ、以降、 N の順に対応して高次モードが検出されます。

これに対して 1 次座屈点の直前（固有値が負に転ずる直前）まで圧縮した状態での結果を Fig. 10 右側の (b) 図に示します。ここまで追い込んだ状態では既に軸対称モードの出現は弱まり、この例では $N=16$ のモードが最低次となりました。またそれ以降も次数と N の関係は稀薄で、多くの座屈モードが存在できることを示唆しています。

【6】座屈経路の履歴解析

次に、荷重-変位曲線を求めるための履歴解析について説明しましょう。

■履歴解析の手順

Fig. 11 に今回の解析手順の概念を示します。円筒の軸圧縮では、1 次座屈点の後、変位が一旦戻りつつ耐力を失う経路をたどるので、この領域までは変位制御による弧長法を適用します。

弧長法により安定な 2 次座屈の経路に誘導されたことを確認した後、人工粘性法を用いた強制変位の解析に移行します。これは、波数の異なる座屈モードを安定に飛び移らせるためには、弧長法は鋭敏すぎるためです。

■領域 1：弧長法

まず弧長法による領域での履歴を Fig. 12 に示します。今回の解析では、形状の初期不整として固有値解析で得られた座屈モードを導入し、分岐経路への導入を図りました。

Fig. 8 に示すように、八巻らの知見からは、今回の試験体では $N=12$ ないし 13 の波数で 2 次座屈に移行するよう見られます。そこで Fig. 10 (b) の 18 次モード ($N=13$) を採用し、座屈後に 13 波のモードに滑らかに移行できるように

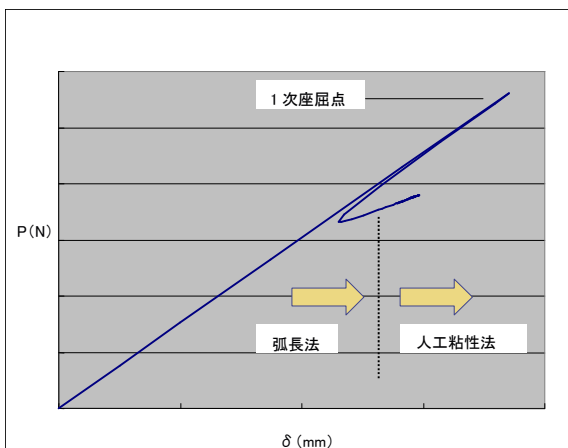


Fig. 11 履歴解析の手順

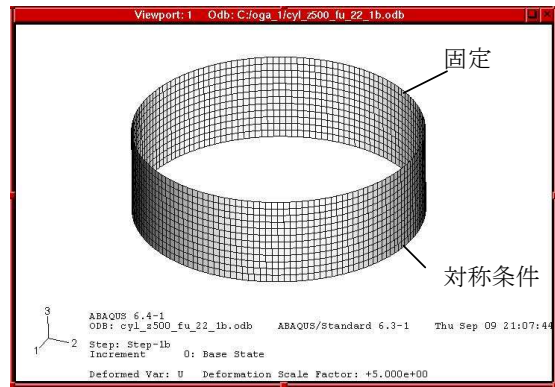


Fig. 9 初期形状（理想形状）

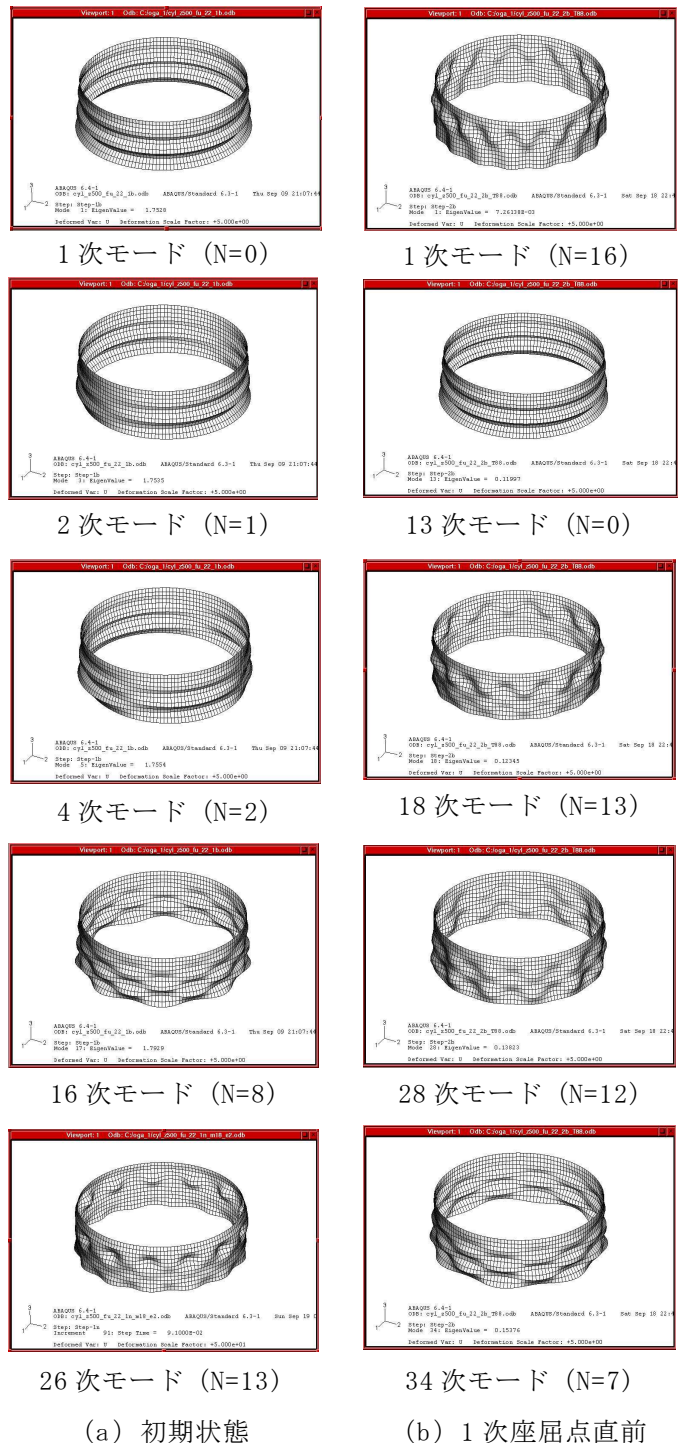


Fig. 10 固有値解析の結果

試みしました。また、不整量は円筒の肉厚の10%となるように調整して適用しました。

この結果、1次座屈点は分岐点ではなくN=13の飛び移り座屈点となり、円筒の変形は座屈後の経路に導かれます。しかし弧長法では単一の安定な経路をたどらせることは難しく、解が迷走するのをこらえながらFig. 12のA, B, C点のような変形モードが順に現れ、D点でようやく13波の形状に落ち着きます。

形状が軸対称であるため、同じ13波の波であっても、円周方向にその位置を定め難いという問題もあることに注意して下さい。

従って、この領域を安定に解析するポイントはいかに適正な初期不整を与えるかという点に尽きます。今回は八巻らの試験結果を参照できましたが、先行例のない場合は試行錯誤にならないを得ません。今後の発展を期したいと思います。

■ 領域2：人工粘性法

ABAQUSでは、補遺に示すような人工粘性の手法により解析の安定化を図ることができます。Fig. 13に弧長法から人工粘性法に切り替えた後までの結果を示します。N=13, 12, 10, 7と曲線を飛び移ってゆく経過を得ることができました。

なお、人工粘性法では、与えられた減衰係数が適正であること(大きすぎないこと)が重要と考えられるので、デフォルトの1/1000まで減衰係数を落とし、比較してみました。

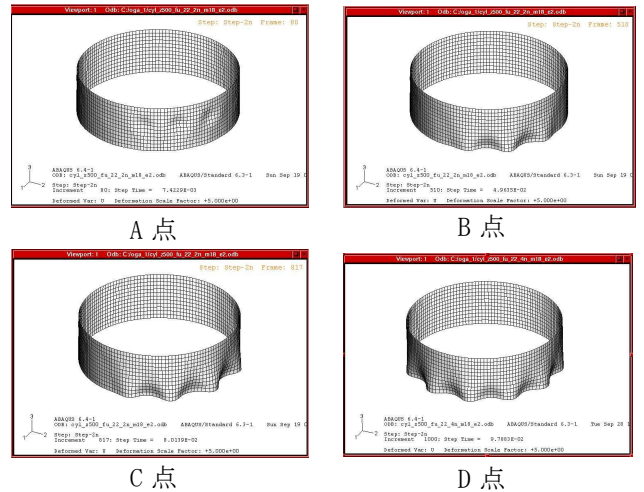
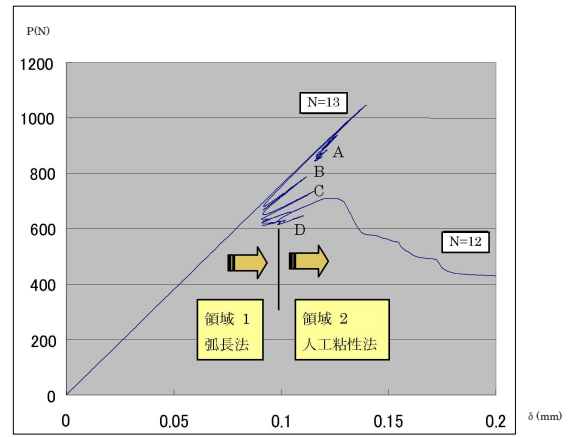


Fig. 12 領域1：弧長法

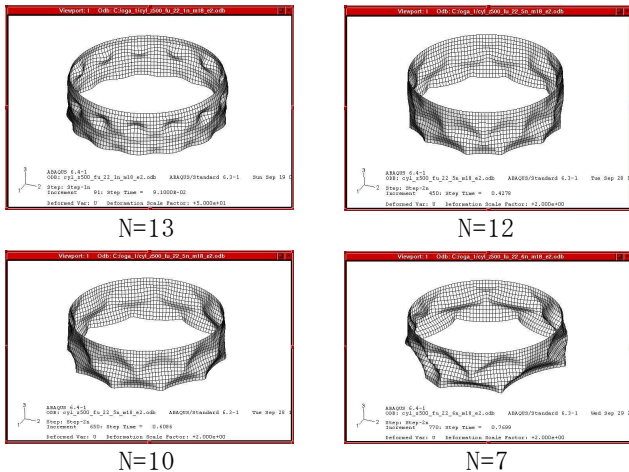
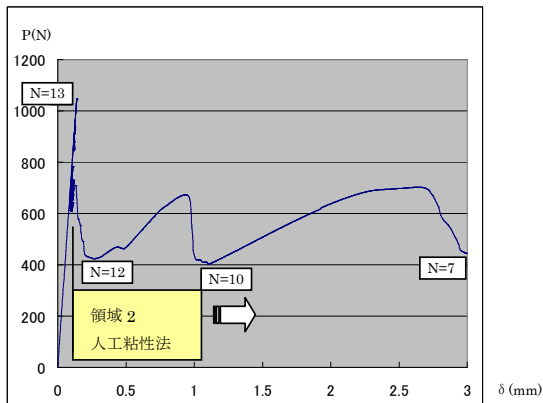


Fig. 13 領域2：人工粘性法
(D. E. F=2.0E-04, Default)

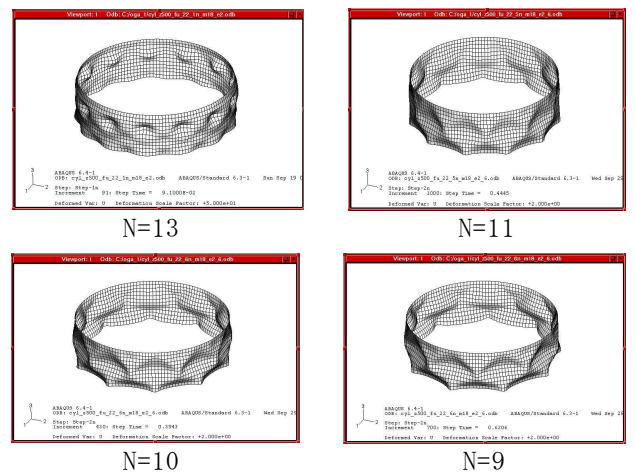
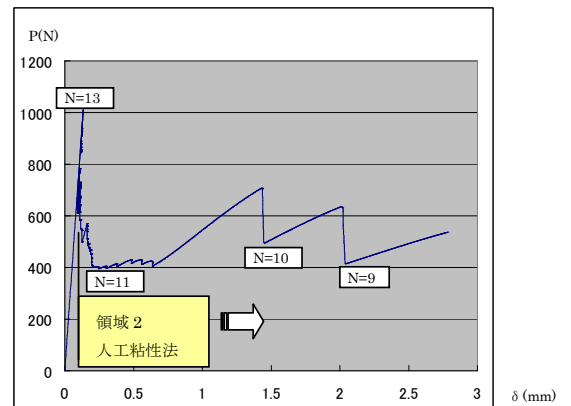


Fig. 14 領域2：人工粘性法
(D. E. F=2.0E-07, Default/1000)

結果を Fig. 14 に示します。Fig. 13 の結果と比べ、荷重－変位曲線は差があるように見えるものの、座屈モードとしては安定な形状が得られているものと判断されます。

そこで得られた 2 つの結果を重ねて示すと、Fig. 15 のようになります。例えば N=10 の経路は完全に重なることがわかります。すなわち、わずかなきっかけの違いで経路に差を生ずるものの、重ねて見れば N=13 から N=9 まで 1 波ずつ波数を減じながら飛び移る挙動を表現することができました。

なお、Fig. 15 には八巻らの実測値をあわせて示します。今回の FEM による解はこの実測値の延長上にあり、十分に妥当な結果が得られたものと考えられます。また ABAQUS に用意された人工粘性の手法は、この問題に対して適正と判断されます。

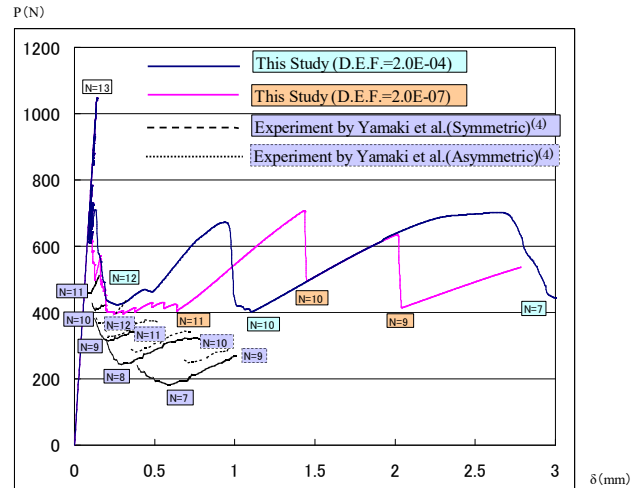


Fig. 15 荷重－変位曲線のまとめ

【補遺】 ABAQUS の人工粘性法

ABAQUS/Standard では不安定な擬似静的問題に対して、モデル全体へ体積に比例した減衰を付加する事により対処しています。つまり次式で表される粘性力が全体平衡方程式へ付加されています。

$$F_v = c M^* \dot{v}$$

ここで、 F_v : 粘性力、 M^* : 人工質量マトリックス

$$P - I - F_v = 0$$

c : 減衰係数、 $v = \Delta u / \Delta t$: 節点速度ベクトル

P : 外力ベクトル、 I : 内力ベクトル

局所的な不安定化が生じると、その部分の速度が増大し、この結果、局所的に解放されるひずみエネルギーは、付加された減衰により消散されます。ひずみエネルギーに対する消散エネルギーの比が消散エネルギー比 (Dissipated Energy Fraction) であり、デフォルト値は 2.0E-04 が与えられています。

謝辞

今回の解析にあたって、波数の異なる座屈モードの飛び移りと人工粘性法の適用性について、慶應義塾大学・野口裕久教授の御指導を頂戴しました。また今回の内容は 2004 年 10 月に開催された ABAQUS 国内ユーザーズミーティングにおいて発表した内容を改訂したものです。同社・金沢京子氏および細川治男氏の御助勢に厚く御礼を申し上げます。

参考文献

- (1) S.P. Timoshenko and J.Gere, 長谷川訳, 弾性安定の理論, 下, ブレイン図書出版, 1974.
- (2) L.H. Donnell, Trans. ASME, 56, 1934.
- (3) T.V. Kármán and H.S. Tsien, J. Aeronaut. Sci, vol. 8, p. 303, 1941.
- (4) N. Yamaki, Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells, North-Holland, 1984.
- (5) 日本機械学会, シェルの振動と座屈ハンドブック, 技報堂, 2003.
- (6) R. Narayanan ed., Plated Structures, Stability and Strength, Applied Science Publishers, 1983.
- (7) ABAQUS Analysis User's Manual Version 6.4, ABAQUS, Inc., 2003. ABAQUS は ABAQUS, Inc. 殿の製品です。

表紙: Pierre Auguste Renoir, Girl in a Lace Hat, 1891, ポーラ美術館蔵*, 掲載にあたっては、財団法人ポーラ美術振興財団の許可を頂いております。

* 2005 年 1 月 16 日～8 月 28 日, 「ポーラ美術館の印象派展」を開催中。神奈川県足柄下郡箱根町。