

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

October 2002

First of all, the Commission focuses on the security of the people. It is people-centered. In so doing, it is fully aware that it cannot expect to all peoples or all increasingly narrowing it cal and pervasive thre and displaced persons and facing hunger and security of individual dresses the problems they by ethnicity, bel inequality among groups time has been ident violence and eventual ses. Second, in approa the Commission is cons of protection and one o range of intervening ad judicial and institut basic human needs. It tion is less costly on community as a whole.



nt years, it is not the that have led tensions situations. After all, if not comfortable, po- nless the threat is so orient your standing? ghanistan the warnings meek. Although it's ning more and more the ng way before it becomes ntation. The Commission a host of action points. ial. They involve bot- level-development assistance nt attempt to emphasize struction program might on empowerment endeav- e suffered over twenty displacement, as well as

extreme deprivation in health, education and a whole range of social services, there is no other alternative but empower- ment as the priority for the rebuilding of the nation. A

戦艦マッキンレー艦上, 仁川, 1950年9月

【特集】 はり解析における諸問題

(その1 線形問題)

【1】はじめに

近年、建築・土木あるいは自動車などのような組立構造物を扱う分野において、構造物の軽量化と高剛性化を両立させるため、はりによるFEM解析の高度化が求められるようになってきています。しかし、はり要素は部材を線に退化させた要素であるため、引張と曲げ以外の性能、例えばねじり、せん断、または非弾性などの効果を合理的に扱うためには補足的な配慮をする必要があります。今回はこれらの応用的な課題の中で、まず線形に属する問題を理論解と比較しながら説明します。

【2】はりの変形状態

適当な方法で支えられた細長い棒がそれに垂直な荷重を受けたとき、棒には曲げとそれに対応する応力を生じます。そのような棒が軸に垂直な荷重すなわち横荷重を受け、またはモーメント荷重を受けて曲がり、それらに抵抗して作用するときこれを一般にはり (beam) といいます。ここではまず参考文献(1)を参照し、はりの変形の挙動を分類してみます。

はりの変形を記述するための座標系をFig.1のように定めます。z軸をはりの軸方向に定め、右手系となるようにx軸、y軸をはりと直交する方向に定めます。はり内部の任意点(x, y, z)のx軸、y軸およびz軸方向の変位をそれぞれ大文字U(x, y, z)、V(x, y, z)、W(x, y, z)で表します。このようなはりの変形状態を、軸方向変形、曲げ変形、ねじり変形の3つに分類します。

2.1 はりの軸方向変形

Fig.2に示すように、はりは細長いために、はりの軸方向に対する変形の状態は断面上で一様であると考えられます。この変形状態を式で表すと(1)式になります。

$$W(x, y, z) = w(z) \quad \dots (1)$$

2.2 はりの曲げ変形

はりに横荷重が加わると、その変形はFig.3に示すように曲げ変形とせん断変形に分けて考えることができます。このうち曲げ変形は、はりの長手方向の伸縮によってもたらされるもので、「変形前に軸に直交していた断面は、曲げ変形後も変形した軸に直交する」ことを想定しています。すなわちFig.3(a)に示すような変形の状態を仮定することになります。このような扱いはオイラー・ベルヌーイの仮定と呼ばれ、はり理論の基礎となるものです。実際、十分に細長い部材の横荷重に対する変形は、この曲げ変形だけを仮定することによって十分に取扱うことが可能です。

しかし、はりに加わる横荷重は曲げ変形だけでなく、Fig.3(b)に示すようなせん断変形を同時にもたらします。細長い部材の場合は曲げ剛性はせん断剛性に比べて圧倒的に小さいので、せん断変形を相対的に無視することができるのです。しかし、はりが細長くない場合、すなわち長手方向の寸法に対して高さがある場合には、曲げ変形が減少する結果、せん断変形を相対的に無視することができなくなります。このせん断変形の効果については、後に章を改めて述べることにします。

ここではまず簡単に曲げ変形に限って、その変形を式の形にしておきます。Fig.4に曲げ変形の様子を示します。図からわかるように、この変形は(2)式のようになり、オイラー・ベルヌーイの仮定を表しています。

$$U(x, y, z) = u(z) \quad W(x, y, z) = -x \frac{du}{dz} \quad \dots (2)$$

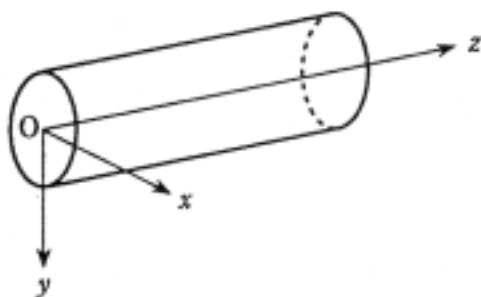


Fig.1 はりの座標系

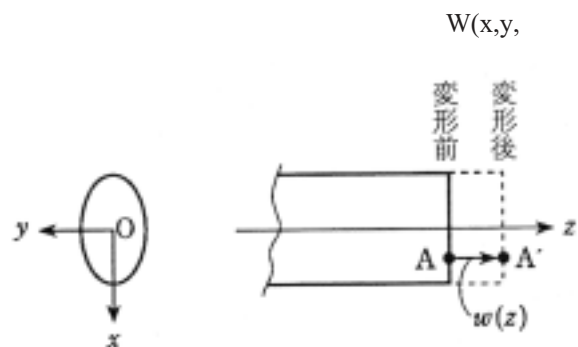


Fig.2 軸方向変形

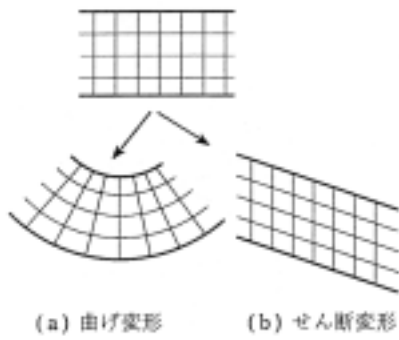


Fig.3 曲げ変形とせん断変形

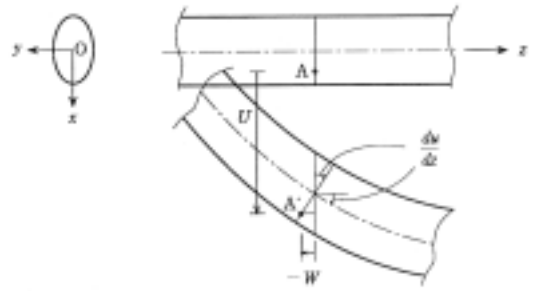


Fig.4 y軸まわりの曲げ変形

2.3 はりのねじり変形

断面の形が長さ方向に一樣であるはりに、両端部の軸方向変形を自由に生じさせるようにした状態で、両端に一对のねじりモーメントを作用させると、Fig.5に示すように、はりの長さ方向に一樣にねじられた変形となります。この変形の状態を式で表現すると(3)式ようになります。

$$\text{一樣ねじりの場合} \quad \frac{d\theta}{dz} = \alpha(\text{const.}) \quad \dots(3)$$

ここで $\theta(z)$ は $z=z$ における断面のねじり角であり、 $d\theta/dz$ は、ねじり率と呼ばれます。したがって、(3)式のような変形状態は、ねじり率が定数 となる一樣なねじり変形を表しています。

一方、Fig.6に示すような開いた断面では、軸方向(z軸方向)にも変位を生ずることに注意して下さい。この軸方向変位は、断面形に固有の分布形を持つと考えられますが、変位の大きさはこの分布形にねじり率を乗じて表されると仮定します。この軸方向変位の分布形を (x, y) の記号で表します。Fig.7を参照すると、この変形の様式は(4)式で表されます。このようなねじり変形は、サンブナンねじりあるいは純ねじりなどと呼ばれています。また $\omega(x, y)$ はサンブナンのゆがみ関数、またはそり関数と呼ばれています。

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -y \cdot \theta(z) \\ V(x, y, z) &= x \cdot \theta(z) \\ W(x, y, z) &= \omega(x, y) \cdot \alpha \end{aligned} \quad \dots(4)$$

これに対してFig.8に示すようにはりの一端が固定されている場合は、端部のゆがみ変形(軸方向変形)が拘束されるため、他端にねじりモーメントを作用させても一樣なねじり変形は生じません。しかしこの場合も、(4)式中の定数 α のかわりにねじり率をそのまま用いて、サンブナンねじりの理論を拡張させることができます。このようなより一般的なねじり変形を、曲げねじりあるいはそりねじりなど呼びます。

なお、曲げねじりと呼ばれる理由は、このねじり変形では、ねじりによるせん断力だけでなく、曲げ変形の際に見られるような軸方向の垂直応力が生じるためです。曲げねじりの効果をFEMで検討した結果は4項に示します。これに対して一樣なねじり、すなわちサンブナンねじりでは断面内にはせん断力しか生じません。

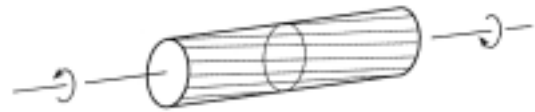


Fig.5 一樣ねじり

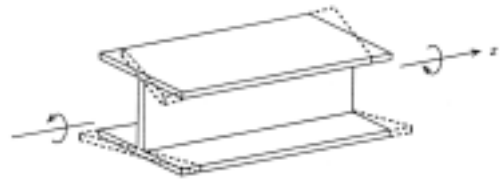


Fig.6 ねじりによる軸方向変位

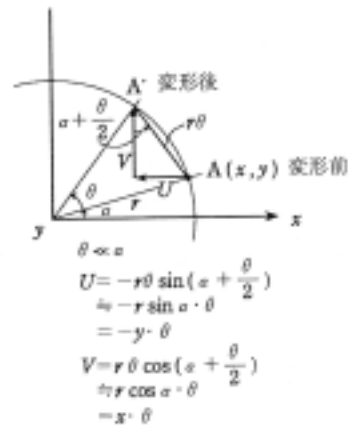


Fig.7 断面のねじりによる回転



Fig.8 拘束ねじり(曲げねじり)

【3】 はりのたわみに及ぼすせん断力の影響

次にせん断力の効果について参考文献(2)を参照させて頂きながら説明します。はりに横荷重が与えられると、その荷重は曲げモーメントとせん断力の形ではりに作用します。このとき横断面には曲げモーメントに抵抗して曲げ応力を生ずると共に、せん断力に抵抗してせん断応力がもたらされます。しかし、曲げモーメントとせん断力とは無関係ではありません。(5)式に示すように曲げモーメントの軸方向の勾配がせん断力に一致するというのがはり理論の基本的な考え方です。

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad \dots (5)$$

いまFig.9のようにz軸に対称な断面を持つはりにおいて、中立軸y軸まわりに曲げモーメントが作用する場合、近接した2つの断面mnとm'n'に作用する曲げモーメントをMおよびM+dMとします。このとき断面mnに生じる曲げ応力は(6)式となります。

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z \quad \dots (6)$$

ここでせん断応力 τ_{zx} がはりの幅方向に一樣に分布するものと仮定すれば、力の釣合いより(7)式が得られます。(7)式は、mnとm'n'の区間における軸方向応力の変化 $d\sigma_x$ をzから h_1 の高さまで積分した力が、z面におけるせん断応力 τ_{zx} による力と釣り合っていることを示しています。

$$\int_z^{h_1} d\sigma_x \cdot b \cdot dz = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx \quad \dots (7)$$

(6)式を(7)式に代入し、更に(5)式の関係を用いると(8)式を得ます。

$$\tau_{zx} = \frac{Q}{bI_y} \int_z^{h_1} b \cdot z \cdot dz \quad \dots (8)$$

ここでFig.10のような長方形断面の場合、 b =定数、 $I_y = bh^3/12$ であるので(8)式は(9)式のようになり、 τ_{zx} は、放物線状の分布となることがわかります。

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Q}{bI_y} \int_z^{h_1} b \cdot z \cdot dz \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} \left\{ 1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\} \quad \dots (9) \end{aligned}$$

モーメントの釣合いが保たれるためには $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ であることが必要です。したがって(9)式にならうと τ_{xz} も放物線状に分布し、中立軸上で最大になることがわかります。この最大値は、(10)式に示すように平均せん断応力 τ_{mean} の1.5倍に等しくなります。なお上下面は外表面であるため、外界との摩擦があるなどの特別な場合を除いては、せん断応力は発生できず0となることに注意して下さい。

$$(\tau_{xz})_{max} = (\tau_{xz})_{z=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = 1.5\tau_{mean} \quad \dots (10)$$

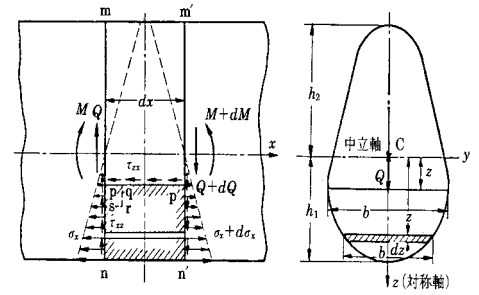


Fig.9 はりのせん断応力

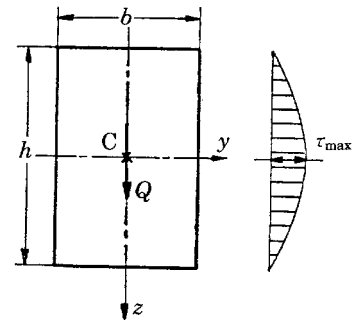


Fig.10 長方形断面のせん断応力の分布

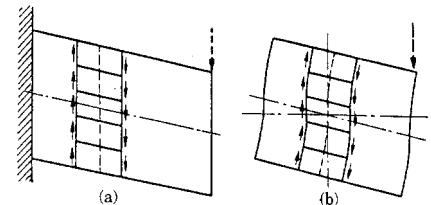


Fig.11 せん断応力による断面のゆがみ

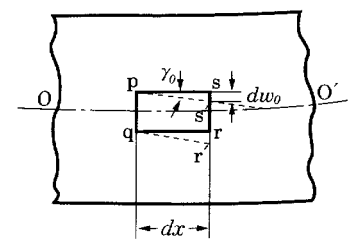


Fig.12 せん断応力によるはりのたわみ

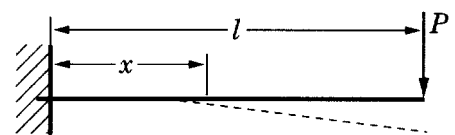


Fig.13 片持はり

次にせん断力によるはりのたわみについて考えます。Fig.11(a)は、せん断応力が横断面上で一様に分布していると仮定したときの変形形状です。いわゆる単純せん断の変形になります。しかし(9)式、(10)式に示したように、はりの上下面ではせん断応力は発生できないので、現実の変形はFig.11(b)のようにS字型にわん曲する形状となります。すなわちせん断応力の存在は、はりの平面保持の仮定を損なうものになります。このようなせん断変形ははりにたわみをもたらす、曲げ応力によるたわみにこのたわみを加えたものが、はりのたわみになります。例えば、Fig.12において中立軸は曲げによって00'のようにわん曲するだけでなく中立軸上の長方形要素pqrsがせん断応力 $(\tau_{xz})_{z=0}$ によるせん断ひずみ γ_0 によってpqr's'のように変形します。この結果(11)式に示すようなせん断によるたわみ dw_0 を生じます。

$$\frac{dw_0}{dx} = \gamma_0 = \frac{(\tau_{xz})_{z=0}}{G} \quad \dots (11)$$

横断面の平均せん断応力を Q/A とすれば、中立軸のせん断応力は(12)式となります。ここで例えば長方形断面の場合は(10)式より $k=1.5$ です。

$$(\tau_{xz})_{z=0} = k \frac{Q}{A} \quad \dots (12)$$

いま、Fig.13に示すような先端に集中荷重 P を受ける長方形断面の片持ばりの問題を考えます。この問題では、はりの軸方向について $Q=P$ で一定であるので、はりの先端のせん断によるたわみは、(11)式と(12)式から簡単に(13)式で示されます。

$$(w_0)_{x=l} = \frac{1.5P}{AG} L \quad \dots (13)$$

よって、曲げによるたわみと足しあわせてはり全体のたわみは(14)式となります。

$$w_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{1.5P}{AG} L \quad \dots (14)$$

この(14)式においてせん断の効果がたわみ量全体に対してどの程度あるか調べてみます。以下のような諸元をもつ長方形断面の片持ばりを考えます。

長さ $L=100, 200, 500, 1000$ [mm]の4ケース
 断面形状 高さ $h=50$ [mm]、幅 $b=10$ [mm]
 集中荷重 $P=10$ [N]
 材料定数 $E=2 \times 10^5$ [N/mm²]、 $\nu=0.3$

(14)式を計算した結果をTable 1に示します。長ささと高さの比で評価すると、 $L/h = 10$ 以上の細長いはりであればせん断の効果は1%以下で無視できることがわかります。

Table 1 片持ちばりのたわみに対するせん断力の影響

	はりの形状			理論解		FEM解(#3)		FEM解(#98)		
	長さ L [mm]	高さ h [mm]	L/h	曲げたわみ [mm]	全たわみ [mm]	せん断たわみ 全たわみ [%]	全たわみ [mm]	せん断たわみ 全たわみ [%]	全たわみ [mm]	せん断たわみ 全たわみ [%]
CASE-1	100.0	50.0	2.0	1.60E-04	1.99E-04	19.6	1.97E-04	18.8	1.99E-04	19.6
CASE-2	200.0	50.0	4.0	1.28E-03	1.36E-03	5.7	1.34E-03	4.7	1.36E-03	5.7
CASE-3	500.0	50.0	10.0	2.00E-02	2.02E-02	1.0	2.01E-02	0.6	2.02E-02	1.0
CASE-4	1000.0	50.0	20.0	1.60E-01	1.60E-01	0.2	1.60E-01	0.1	1.60E-01	0.2

注 .FEM解の列のせん断たわみは、全たわみのFEM解から曲げたわみの理論解を差し引いた値

次にFig.14のような2次元のモデルを使用してFEM解析を行います。今回は、MSC.Marc2001を使用し、平面応力要素(タイプ3)により解析しました。得られたたわみについて理論解と比較した結果をTable 1とFig.15に示します。理論解と良好な一致を示すことがわかります。なお、Fig.15にはせん断を考慮できるビーム要素(タイプ98)の結果もあわせて示します。理論解と良く一致します。タイプ98は断面性能(A, I)を指定するタイプの弾性はり要素です。この例では長方形断面に見合うよう、有効せん断断面積を実断面積の1/1.5として指定しました。

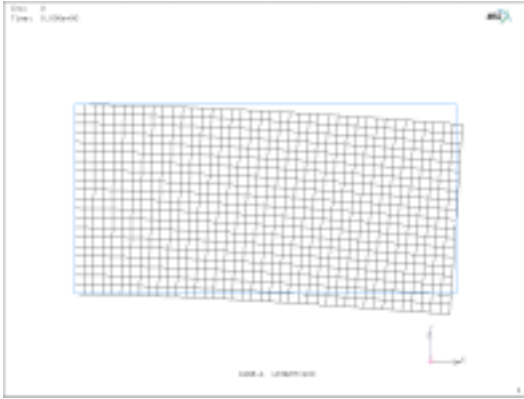


Fig. 14 平面応力モデル

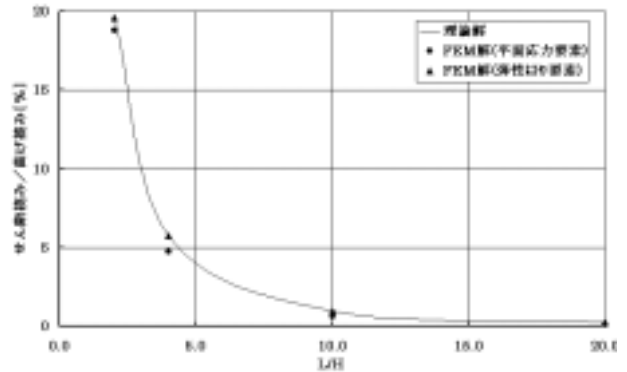


Fig. 15 片持ばりのたわみに対するせん断力の影響

Fig.16に平面応力要素モデルで得られたせん断応力の分布を(9)式の理論解と比較して示します。良好な結果が得られていることがわかります。また同じ断面でのゆがみをFig.17に示します。この曲線は、FEMで得られた軸方向変位の分布から、直線状の平均変位分すなわち曲げ変位の分を差し引いた値です。Fig.11(b)の概念図に示したようなS字形のゆがみを生じていることがわかります。

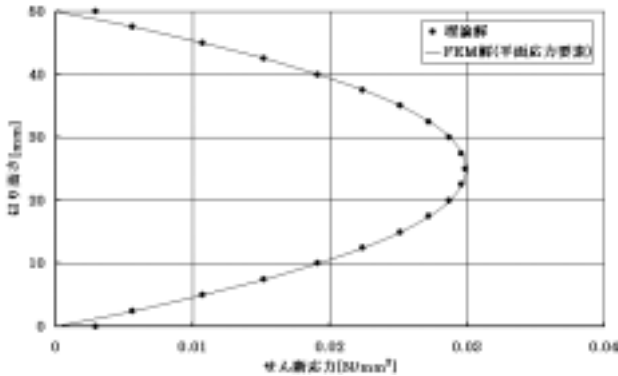


Fig. 16 長方形はり断面のせん断応力分布

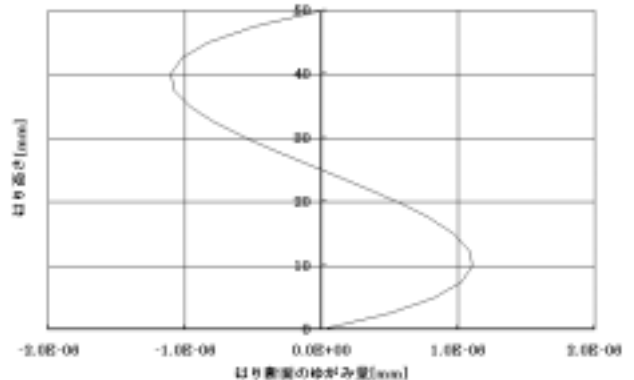


Fig. 17 せん断力による断面のゆがみ

【4】 曲げねじりモーメントを考慮したはりのねじり解析

次に、ねじりに対する断面のゆがみの効果を参考文献(2)～(4)を参照させて頂きながら説明します。Fig.5に示す中実棒や中空棒のような閉断面のはりにねじりモーメントを作用させると、横断面は軸がねじられた後も平面を保ち、横断面上の半径線は直線のままで回転変位を行うという条件が成り立ちます。しかし開断面のはりにねじりモーメントを作用させると、ねじりに伴い横断面は凸凹を生じていわゆるゆがみを生じます。

Fig.18のような断面をもつはりFig.19のようにz軸まわりにねじる場合には、横断面を3個の長方形にわけて、それぞれの長方形断面はりにトルク T_1 、 T_2 、 T_3 が単独に作用すると考えると、ねじりモーメント T は、ねじり剛さを GJ として(15)式で表せます。

$$T = GJ \frac{d\theta}{dz} \quad \dots (15)$$

ただし、 $T = 2T_1 + T_2$ 、 $J = \frac{2bt_1^3 + ht_2^3}{3}$ とします。

またFig. 20のようにはりの一端を固定し他端にねじりモーメントを加えた場合は、固定端では横断面の変形が自由でないためにフランジがわん曲し、ねじれ角は軸線に沿って一様でなくなります。固定端からzだけ離れた断面のねじれ角を θ とすれば、フランジはyz面内でわん曲してy軸方向に(16)式のようにvだけたわみます。

$$v = \frac{h}{2}\theta \quad \dots(16)$$

Fig. 19のように自由にねじられる場合には、 θ はzの一次関数であるので θ の2階の微分は0、すなわちフランジには曲げモーメントが作用しません。しかしFig. 20のように一端を固定した場合は、フランジとウェブは互いに結合されているため自由にはねじれません。そのためフランジとウェブの結合面にはせん断力が生じ、これはフランジに対してはFig. 21のような分布荷重として作用します。図からわかるようにこの分布荷重はフランジに曲げたわみvをもたらすこととなります。このとき、フランジに作用しているx軸周りの曲げモーメントMは(17)式で表せます。このモーメントはバイモーメントと呼ばれています。

$$M = -B_1 \frac{d^2v}{dz^2} \quad \dots(17)$$

ここで B_1 は、 $B_1 = \frac{Et_1 b^3}{12}$ で表されるx軸まわりの曲げ剛さ

(16)式、(17)式よりフランジに作用するせん断力は(18)式で表せます。

$$Q = \frac{dM}{dz} = -B_1 \frac{d^3v}{dz^3} = -\frac{B_1 h}{2} \cdot \frac{d^3\theta}{dz^3} \quad \dots(18)$$

フランジにはトルク T_1 とせん断力 Q が作用しており、横断面に生ずるせん断応力のy軸方向の合力は Q に等しく、z軸まわりの合モーメントは T_1 に等しくなっています。またウェブの横断面に生ずるせん断応力のz軸まわりの合モーメントは T_2 に等しくなっています。そこでこれら横断面のせん断応力の合モーメントを外力のモーメント T に等しいとおいて(19)式が得られます。

$$T = (2T_1 + T_2) + Qh \quad \dots(19)$$

(19)式に(15)式、(18)式を代入して(20)式を得ます。

$$\dots(20)$$

ここで GJ :ねじり剛性、 $C_w = \frac{t_1 b^3 h^2}{24}$:曲げねじり定数

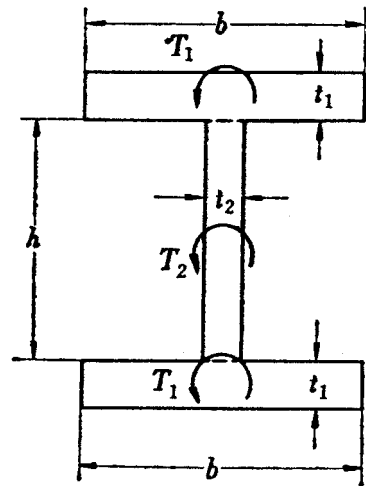


Fig. 18 はりの断面形状

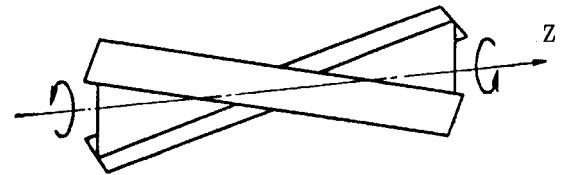


Fig. 19 はりのねじり(両端自由)

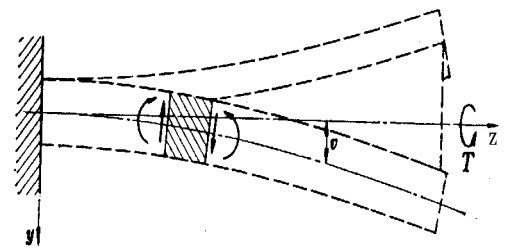


Fig. 20 はりのねじり(片端固定)

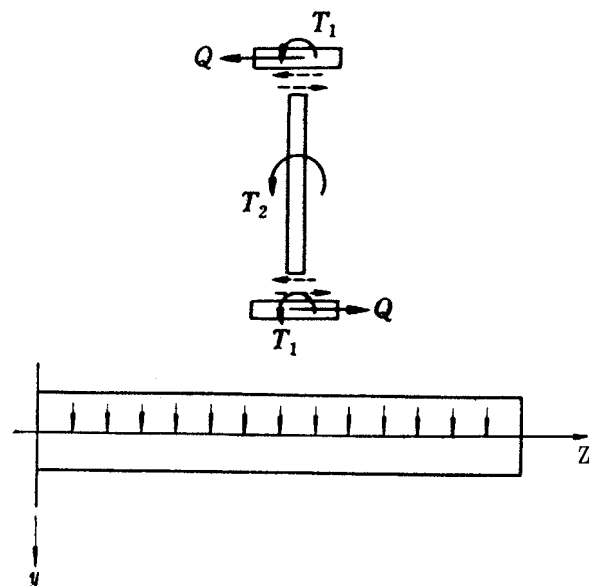


Fig. 21 フランジに作用するせん断力

(20)式の第1項は単純ねじりモーメントであり、第2項は曲げねじりモーメントを表しています。(20)式からモーメント荷重 T と回転角 θ の関係を求めると(21)式になります⁽³⁾。

$$\theta = \frac{T}{GJ} \left\{ z - \frac{1}{\beta} \frac{\sinh \beta L - \sinh \beta(L-z)}{\cosh \beta L} \right\} \quad \text{ここで } \beta = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}}, \quad L: \text{ はりの全長} \quad \dots (21)$$

次に(15)式より求められる両端自由(Fig. 19)のときの回転角と、(21)式より求められる片端固定(Fig. 20)のときの回転角の違いについて調べてみます。以下のようなH形断面のはりを考えます。

長さ	L=1000 [mm]	トルク	100 [kN]
断面形状	H-120 × 120 × 10 × 10	拘束条件	両端自由、片端固定の2ケース
材料定数	E=2 × 10 ⁵ [N/mm ²]		=0.3

Fig. 22のようなモデルについてシェル要素(タイプ75)を使用してFEM解析を行いました。ウェブの中心線の回転角について(15)式と(21)式より求めた理論解と比較した結果をFig. 23に示します。Fig. 23には、同じ断面について開断面のビーム要素(タイプ79)を使用した解析結果もあわせて示します。シェル要素、ビーム要素ともに、理論解と良好な一致を示すことがわかります。図中、両端自由の場合は片端固定に比べて2倍程度の回転角を示し、開き断面のはりのねじり問題では、断面のゆがみの効果が非常に大きいことがわかります。

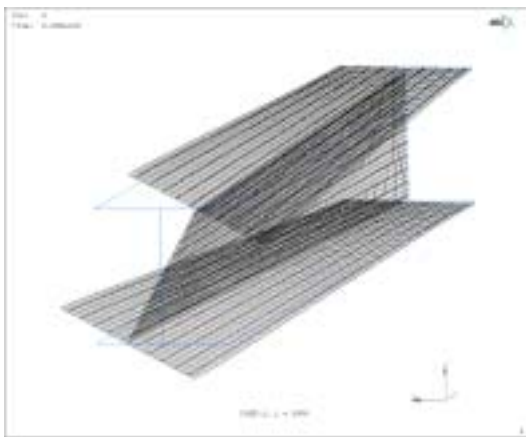


Fig. 22 はりのねじり(両端自由)

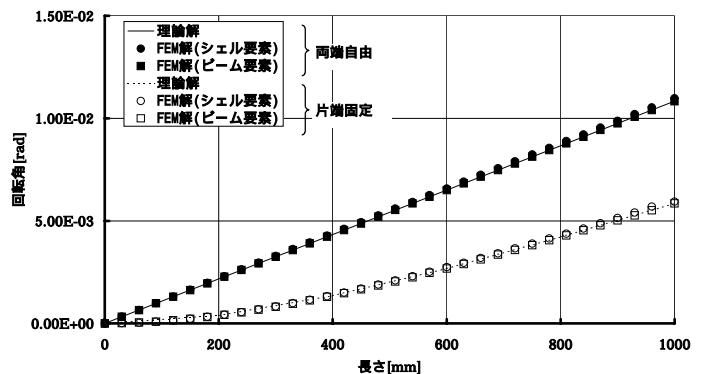


Fig. 23 はりのねじり

参考文献

- (1) 藤谷, 薄肉はり構造解析, 培風館, 1990.
- (2) 中原, 材料力学(上・下), 養賢堂, 1964.
- (3) 構造力学公式集, 土木学会, 1974.
- (4) 鵜戸口, 材料力学(上・下), 裳華房, 1964.

表紙 「カール・マイダンス, 1941 ~ 1951」, ニッコールクラブ, ©Carl Mydans & Nikkor Club, 1983.
 仁川上陸直前のマッカーサー元帥, 後列左よりドイル提督(海軍上陸作戦専門家), アーモンド少将(米地上軍指揮官).
 Sadako Ogata, Globalization and Human Security, Weatherhead Policy Forum, Columbia University, 27 March 2002. <http://www.humansecurity-chs.org/doc/columbia.html>

