

vol. 2001-2

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.
October 2001



Conwy Suspension Bridges, Wales

【特集】 単軸試験によるゴム材料モデルの推定

- ABAQUS ・ MSC.Marc による解析 -

FEM Consulting Services for Engineering Practice
URL <http://www.mech-da.co.jp>

【1】はじめに

ゴム材料に対する実用的な解析手法について紹介するにあたり、最近刊行された戦時航空機工業に関する書籍⁽¹⁾からの引用を以下に示します。

1942年、交戦下の米国では、撃墜された日本機に搭載されていた三菱重工業製の金星型エンジンに対し調査委員会が設けられ、材料分析を含む詳細な分解調査が行われた。報告者のW・G・アヴンズは、当時のライト社における星型複列14気筒のサイクロン・エンジン開発チームのヘッドであった。SAE Journal誌は14ページにわたってこの調査報告の内容を公表し⁽⁹¹⁾、Automotive and Aviation Industries誌もこれを記事として掲載した⁽⁹²⁾。調査の結果、冷却フィンの表面積がやや不足気味なのが唯一の欠点とされたが、アヴンズによれば、金星は「特に高性能と言えぬまでも、極めて信頼性の高いものであることは間違いなく、短期間に、また生産設備の未熟な条件下でこれだけのものができるとは信じがたい。」と結論づけている。(一部略)

91)Ovens, W.G., "Some Notes on Design Features of The Mitsubishi Kinsei Engine" in SAE Journal, Vol.50, No.7, July, 1942, pp.253-266.

92)"Mitsubishi Kinsei Engine" in Automotive and Aviation Industries, Vol.87, No.1, July 1, 1942, pp.22-25, 76-78.

当時、日本の技術者は捕獲した米軍機のエンジンを見て、その動力性能もさることながら、オイルリークのない清潔な外見に驚いたと言われています。高水準の工業製品は、単にその設計思想が優れているだけでなく、製造・検査・流通の全てのプロセスの水準が同程度に管理されていることによって初めて成立します。このとき、シール部材に代表されるような部品類は、外部の専門メーカーで製造されることが大半であるので、それらの外注部品が所定の品質で安定に供給されることが極めて重要なポイントになります。

今回とり上げるゴムに関しては、1930年代には米国とドイツで合成ゴムの製造が始まり、1940年には米国United States Rubber社のMooneyが、後にMooney Rivlin則として知られるようになる材料モデルの最初の論文⁽²⁾を提出しています。これに対して日本では、戦争中には合成ゴムの製造も始まり、また戦後1947年には久保がゴム弾性に関する成書⁽³⁾を著していますが、本格的な合成ゴムの工業化に至るには1950年代まで待つ必要がありました。

三菱重工業の戦時時期における航空機エンジンの生産量は5万台、累計5000万馬力、一方、米国の代表的なメーカーであるプラット・アンド・ホイットニー社では36万台、累計6億馬力という数字が残されています⁽¹⁾。台数で7倍、累計馬力で12倍の差を追う戦争であったとすることができます。その帰趨は置くとして、国力の主要な基盤の一つが基礎工学にあることを、現在の我々は、改めて真剣に認識する必要があるものと考えます。

戦後、国内のゴム材料モデルの研究としては、例えば京都大学の川端季雄先生を中心とするグループに多くの成果があり、その業績は紀要にとりまとめられています⁽⁴⁾。今回はその一門である滋賀県立大学山下義裕先生の実測データを背景として、材料データの実用的な設定方法について検討した結果を紹介します。なお本年9月、川端先生の訃報に接しております。謹んでご冥福をお祈り申し上げます。



Fig.1

金星4型エンジン，三菱重工業名古屋発動機製作所，1939～1940頃⁽¹⁾

【2】ゴム材料モデルをめぐる葛藤

ゴムに代表されるような高分子材料は、複雑に入り組んだ長い鎖状の分子構造を持ち、その鎖が伸びることによって数百%に達する大きなひずみが許容されます。分子鎖は伸びきって自由のない状態よりも、自由に縮んだ状態を好みます。この自由度の差はエントロピーとして熱力学的なエネルギーに分類されるものですが、変形を受けて自由度が失われると、その代償として内部に応力が発生して外力に抵抗します。

材料力学的には、このエネルギーの変化はひずみエネルギーの変化に相当すると考えることができます。一般に材料のひずみエネルギーはポテンシャル関数であり、このポテンシャル関数のひずみ成分による微分が応力成分を表します。このような大ひずみの弾性体にひずみエネルギー関数を適用したモデルを超弾性(Hyperelastic)材料と称します。ゴムは最も代表的な超弾性材料です。

ゴムの材料モデルの成立を考えると、物理化学的な観点から物性モデルに帰着させる立場と、材料力学的な観点から弾性モデルに帰着させる立場の2つがあります。この50年程の歴史を振り返ったとき、このような研究の視点の違いは単にゴムだけではなく、広く樹脂材料が属するレオロジーの分野で、様々な葛藤をもたらしてきたものと考えられます。多くの異論があるものと思いますが、物理化学的な立場と材料力学的な立場を両立させることはできません。物理化学に偏れば大ひずみ弾性の厳密性が忘れられ、材料力学に偏ればひずみエネルギー関数は単なる数値近似の方便となってしまうからです。前者は工学的に致命的であり、後者は研究者の意欲を失わせるという面で致命的であったと考えられます。

ゴム材料がシール材として優れるのは、単に弾性によって界面の形状になじむからではなく、体積が変化しないという性質を利用して高い面圧を発生させることができるからです。すなわち閉じた空間の中で自由表面を拘束することによってゴム材料はシール材として機能します。このような挙動を構造力学的に解析しようとする、単にひずみエネルギー関数が特定できているだけでは全く不十分であり、非圧縮性、接触、従動荷重といった高度な解析技術なくしては、実用に足る結果が得られなかったのが実情です。

非線形FEMが現れて30年を経た現在、我々はようやくひずみエネルギー関数の恩恵を享受するに足る環境を手に入れたと考えるのが順当です。最近、ゴムにせよレオロジーにせよ、この30年間の学問的な空白を埋め戻す動きが現れてきました。今後の発展に期待したいと思います。

【3】ひずみエネルギー関数の同定

ゴムのひずみエネルギー関数の形式としては様々なものが提案されており、代表的なものとしては以下のようなものがあります。^{(2),(5)}

$$\text{Mooney (1940)} \quad W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad \dots(1)$$

$$\text{Ogden (1972)} \quad W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad \dots(2)$$

ここで λ_i は伸長比であり、(1)式中の I_1, I_2 はそれぞれ次式で定義される1次及び2次のひずみの不変量です。

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \dots(3)$$

$$I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} \quad \dots(4)$$

Fig.2に、Ogdenの著書⁽⁵⁾で例示されているひずみエネルギー関数を伸長比 λ_1 と λ_2 に対して図化した結果を示します。この曲面の勾配が応力に相当します。例えば一軸の引張試験はこの曲面上をたどる1本の曲線にしかすぎないので、その結果からこの曲面全体を推定することはできないことが容易に理解できます。例として用いたOgdenの定数は以下の通りです。

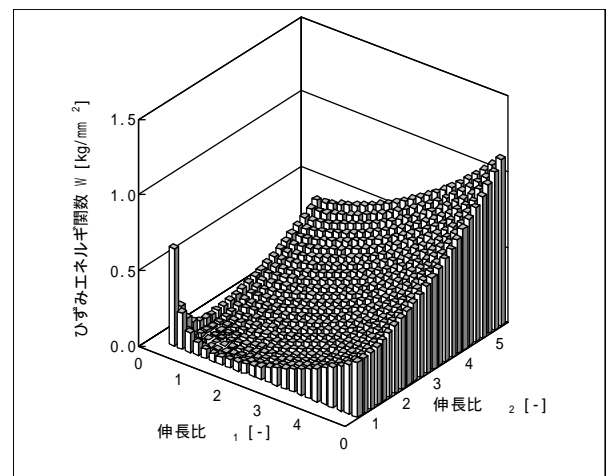


Fig.2 実在ゴムのひずみエネルギー関数

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1.3 & \mu_1 &= 6.3 \times 10^{-2} \\ \mu_2 &= 5.0 & \mu_2 &= 0.012 \times 10^{-2} \dots (5) \\ \mu_3 &= -2.0 & \mu_3 &= -0.1 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

[kg/mm²]

従来の研究では、主に Fig.3 に示すような3種類の試験方法が採用されています。これらの試験では、得られる応力状態が主応力状態となるように工夫されています⁽⁶⁾。

【単軸引張試験】

リボンのような長尺の試験片の引張に相当します。Ogden モデルを例にとると公称応力 S と伸長比 の関係は次のようになります。

$$S = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n-1} - \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha_n-1}) \dots (6)$$

【純せん断試験（一軸拘束一軸引張）】

長尺のリボンの長辺を拘束したまま短辺方向に引張ると、非圧縮性の材料では純せん断場と等価な応力状態になります。

$$S = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-\alpha_n-1}) \dots (7)$$

【一様二軸引張試験】

正方形の薄板状の試験片を縦横に引張ります。Fig.2 に示したような実在のひずみエネルギー関数の曲面上では、 $\lambda_1 = \lambda_2$ の方向（斜め 45° の方向）を昇る経路に相当する試験になります。また非圧縮性の材料では、一様二軸引張は単純圧縮と等価になるので、この試験は非常に重要です。

$$S = \sum_{n=1}^N \mu_n \{ \lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-2\alpha_n-1} \} \dots (8)$$

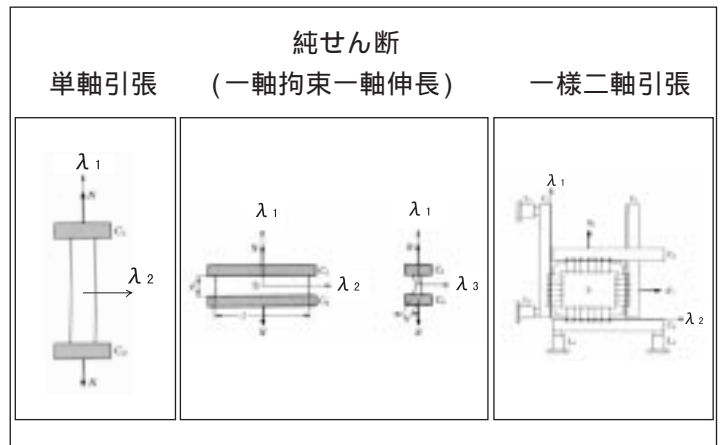


Fig.3 代表的な試験方法

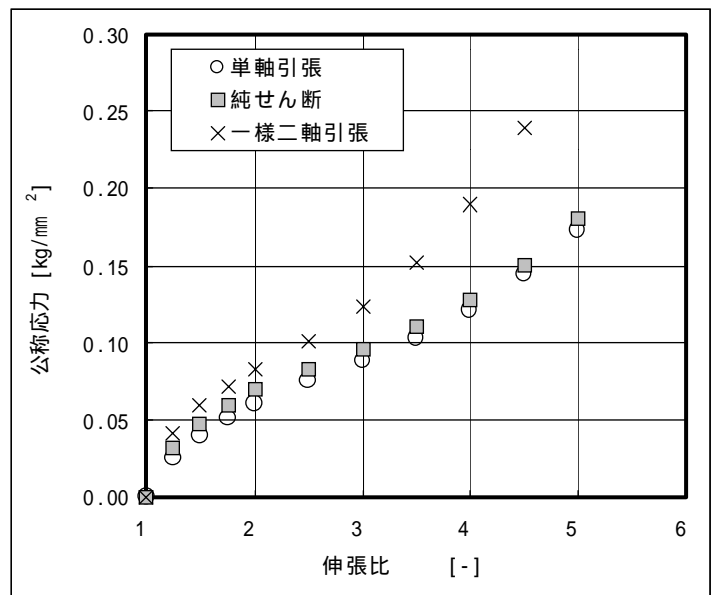


Fig.4 実測値例

Ogden が(5)式を定めるにあたって使用した、これらの3種の試験の応力と伸長比の関係を Fig.4 に示します。単軸引張と純せん断は Fig.2 のひずみエネルギー関数の曲面上で似たような経路をたどる⁽⁶⁾ので、応力と伸長比の関係は大差ありません。しかし、一様二軸引張の結果はこれら2本に対して1.5倍程度高くなるのが通常です。

しかし二軸引張試験機は特殊な構造を持つため、普及を期待することは困難です。また代替としてゴムバルーンをふくらませるような試験もありますが、やはり一般性に欠けます。実際、JISにおいても規格化されているのは単軸引張試験 (K6251, K6254) と圧縮試験 (K6254) に限られています。圧縮試験は二軸引張と等価であるとはいえ、加圧面の摩擦の効果を排除できないだけでなく、得られるひずみ範囲が極めて低いので、FEM 用の材料試験としては全く不適当であることに注意が必要です。

ABAQUS や MSC.Marc などの汎用 FEM では、プリプロセッサの機能の中に、Fig.4 のような実測値を曲線近似して材料モデルの係数を同定する機能が用意されています。特に Ogden モデルは、ゴム材料の物理的性質よりはむしろ数値近似の便宜に配慮した関数形を持っているので、実用的には十分な精度でこれらの曲線を再現することができます。しかし一般の曲線近似と全く同様に、入力したデータの範囲外での挙動は全く保証されていない点に注意が必要です。ゴム材料の FEM 解析で解が発散するなどのトラブルは、ここに原因している例が大半です。

例えばFig.5は単軸引張だけのデータを用いてOgdenの係数を3次まで求めた例を示します。図中の曲線はその係数を用いて(6)～(8)式を計算した結果です。

一様二軸引張の結果は伸長比1.5(ひずみ50%)の付近で応力の極大値を示す形状になっています。実際のFEM解析にこのOgdenの係数を適用すると、このひずみを超えた時点でマトリックスが非正定となり、たとえ強制的に解析を続行したとしても、要素の歪みが大きくなって発散するような結果を招きます。

このような極値の発生を防ぐためには、対象とするひずみ範囲を予め想定して曲線近似をしておくのと同時に、係数の次数をいたずらに多くしないことも重要です。例えばOgdenであれば2～3次にとどめても、実用的には十分な結果が得られます。

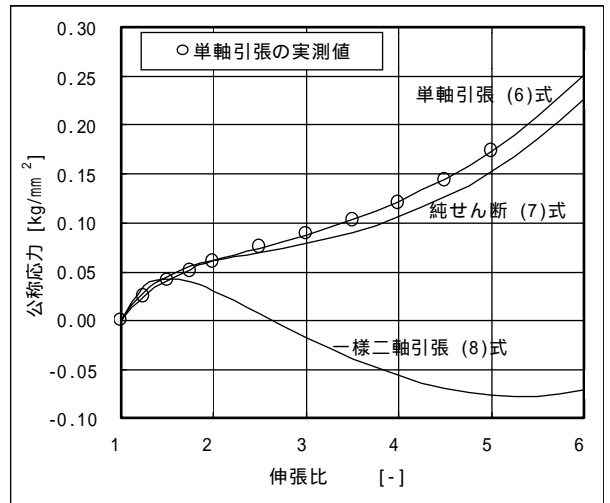


Fig.5 単軸の実測値のみを用いたカーブフィット

【4】二軸引張データの推測

以上に示したように、二軸引張試験は利用が困難であるにもかかわらず、材料モデルを同定する上で非常に重要です。ごく粗い近似であるという前提を許せば、Fig.4に示す曲線群を、単軸引張の曲線からの係数倍で表すことが可能です。Table 1は、このような知見から山下によって実測された縦軸方向の比(応力の比)を表しています⁽⁸⁾。曲線の原点付近の比率は初期弾性率の比(単軸：純せん断：一様二軸 = 3：4：6)によって材料にかかわらず固定である⁽⁷⁾ので、Table 1の比率はある程度ひずみを生じた状態(ε = 3程度)での倍率を表しています。材料によってばらつきはあるものの、Table 1の範囲では以下の比率になっていることがわかります。

$$\text{単軸} : \text{純せん断} : \text{一様二軸} = 1 : 1.1 : 1.4 \quad \dots(9)$$

Fig.6はこの知見に従って、ε = 3の点において(9)式の比率を用いて純せん断と一様二軸引張の点を1点ずつ追加し、MENTATを用いてOgdenの3次の係数までカーブフィットさせた結果を示します。Fig.4の実測値をほぼ再現する結果となっています。弊社の試行によれば、追加点の数は多くない方が良い結果が得られるようです。なお最近では、ゴム材料に対する物理的な考察に基づいて各試験間の差異を表現できるArruda-Boyceモデル等も実用化されていますが、数値近似の柔軟性に優れるOgdenモデルを今回は適用しました。

Table 2は得られたOgdenの係数を入力することによって、(6)～(8)式に従いOgdenモデルの理論解を計算できるようにしたExcelの表示結果を示します。引張だけでなく圧縮方向の計算結果、また初期弾性率の値も表示するようにしているので、材料定数のチェックに有用です。Mooneyモデル用のExcelファイルも用意しています。これらは今回の解析データと共に販売致しておりますので、御利用下さい。

Table 1 単軸引張に対応する応力比

ゴム種別	純せん断	一様二軸引張
IR C0 S1	1.12	1.4
IR C0 S2	1.1	1.4
IR C0 S3	1.14	1.43
IR C0 S2(Relax.10min)	1.12	1.33
SBR C0	1.19	1.47
EPDM C0	1.15	1.55
IR C50 S1	1.08	1.4
IR C50 S2	1.1	1.4
IR C50 S3	1.08	1.42
SBR C50	1.1	1.4

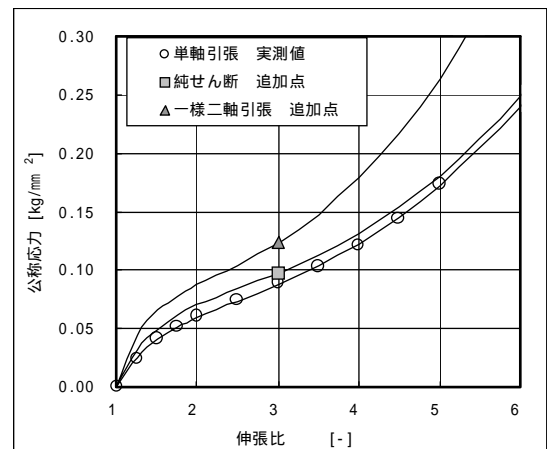
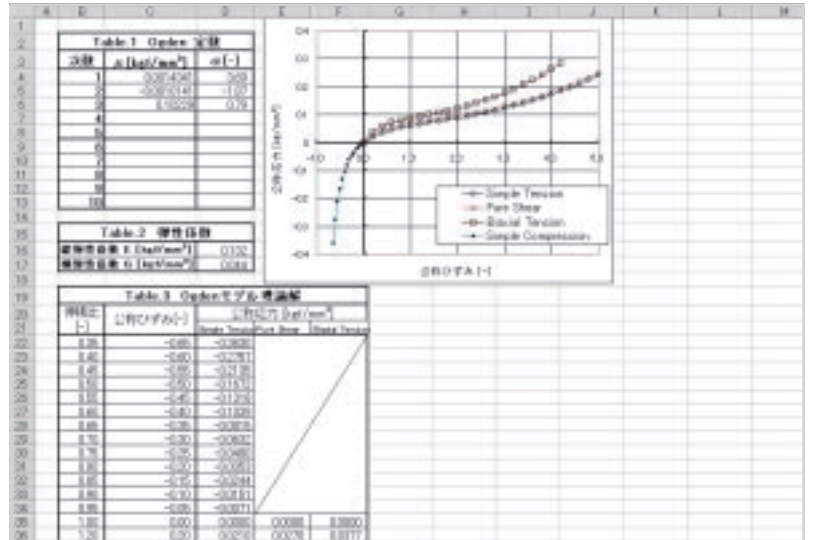


Fig.6 追加点を用いたカーブフィット

Table 2 Excelによるゴム材料の
評価プログラム

(今回の解析入力データと共に
販売しております。)



【5】ゴムバルーンの解析

ゴム風船をふくらますとき、当初は非常に高い圧力が必要であるにもかかわらず、吹き込みが始まると一気に楽になることを経験されていると思います。この問題は、ゴム材料の膜応力状態（一様二軸引張）を扱う例題として古くから知られており⁽⁹⁾、Ogdenの初期の論文⁽¹⁰⁾の中にも引用されています。

Fig. 7に示すような半径 r_0 、肉厚 h_0 の球状のバルーンに内圧を加えると、バルーンは直交する2つの周方向に一樣に伸ばされるので、応力状態は(8)式の一様二軸引張に等しくなります。一方、内圧 p を受ける薄肉球殻では一般に次式が成立します。

$$p = 2h_d \sigma r_d^{-1} \quad \dots (9)$$

ここで h_d : 変形時の肉厚
 r_d : 変形時の球の半径
 σ : 周方向の真応力

(10)式のようなゴムの非圧縮性を考えると、(9)式は(11)式ようになります。

$$h_d = \lambda^{-2} h_0 \quad r_d = \lambda r_0 \quad \dots (10) \quad p = \frac{2h_0}{r_0} S \lambda^{-2} \quad \dots (11)$$

(8)式を(11)式に代入すると(12)式のようにバルーンの圧力と伸長比（半径比）の関係が得られます。ここでは以下の条件に対して検討しました。

$$p = \frac{2h_0}{r_0} \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n - 3} - \lambda^{-2\alpha_n - 3}) \quad \dots (12)$$

バルーンの形状 : $r_0 = 100\text{mm}$, $h_0 = 1\text{mm}$
 Ogden 材料モデル : (5)式と同じ

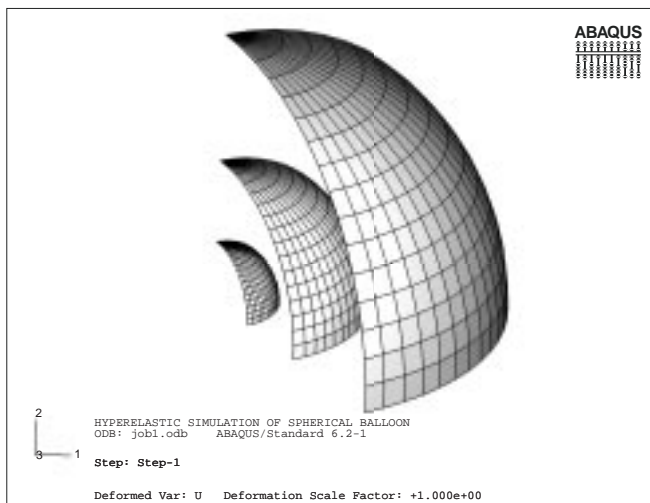


Fig. 7 ゴムバルーンの解析

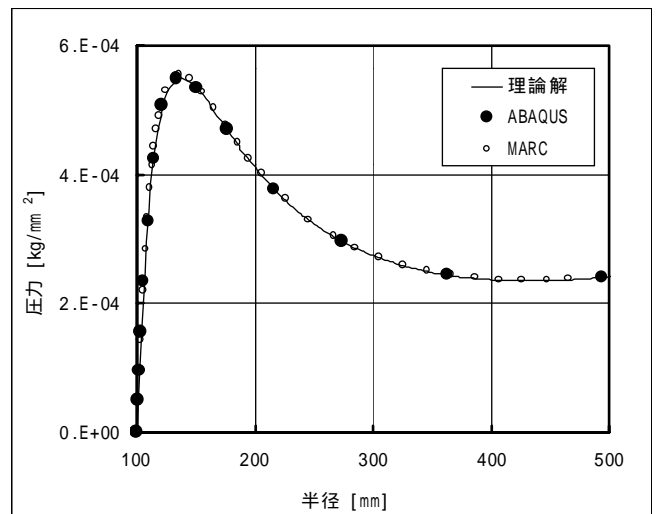


Fig. 8 半径の増加と圧力の関係

Fig. 8 に(12)式の計算結果を示します。半径が1.3倍になったとき圧力が極大値を示す結果が得られました。これは半径の増加に対してその2乗で肉厚が減少し、また、受圧面積も半径の2乗に比例して増加する傾向をもつからです。この問題をFEMで扱うには、ゴム材料を定義できるシェル要素(膜応力要素)以外に、圧力の極値を表現できる弧長法の機能、荷重補正マトリックスを考慮した従動荷重の機能を適用しなければならず、その取扱いは高機能の非線形プログラムに限定されます。最近ではゴムの薄膜の座屈問題に対する需要を多く聞くようになり、この問題はそれらの分野に対する試金石となります。

Fig. 8 に示すように、ABAQUS と MSC.Marc はいずれも満足すべき結果を与えました。尚、この種の形状的に対称な大変形問題を Fig. 7 のような全体モデルを用いて解析すると、僅かな不整により、変形のバランスが大きく崩れて発散する可能性があります。例えばこの例では、頂部の三角形に縮退させた要素の剛性が部分的に高まるのが悪影響をもたらすので、注意が必要です。尚、Ogden の材料定数の入力方法は、2つのプログラムで若干の差がありますが、本質的な差はありません。

【6】ゴムガスケットの押圧解析

これはABAQUS 6.2の例題1.1.18の問題です。Fig. 9 に示すようにゴムガスケットが樹脂製のベースに乗った状態で押圧されます。材料定数は以下の通りです。

ゴム (Mooney)	$C_{10} = 0.35 \text{ Mpa}$	$C_{01} = 0.25 \text{ Mpa}$
樹脂	$E = 8000 \text{ Mpa}$	$\nu = 0.4$

加圧面との摩擦係数は0.05、またゴムの自己接触面での滑りはないものとされています。この問題をABAQUSとMSC.Marcで解析しました。Fig. 9 に示すように両者の結果は良く一致し、計算時間等も大差ありませんでした。この問題のポイントは、押圧の最終段階でゴムがほぼ完全に充満した状態での解析の安定性にあります。最近では、ABAQUSとMSC.MarcはいずれもMooneyとOgdenのモデルにゴムの圧縮性(体積弾性率)を考慮することができるので、このような場面では有効です。体積弾性率の目安は、一般的に初期の横弾性係数Gの5000倍程度です⁽⁷⁾。

またMSC.Marcの自動接触機能であるCONTACTは、境界条件の操作による手法を用いているので、このような深い接触状態では食い込みなどの不具合を生ずる可能性があります。回避の方法は幾つか考えられますが、今回は摩擦モデルにStick-Slipオプションを用いることで挙動が安定化し、ひいては食い込みの回避に有効であったことを付記します。

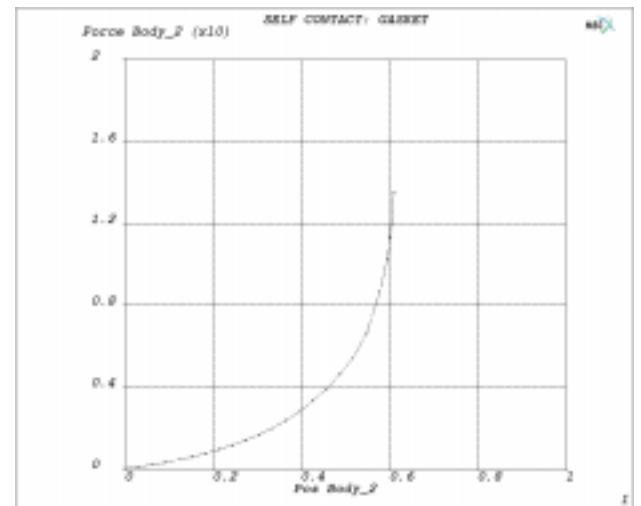
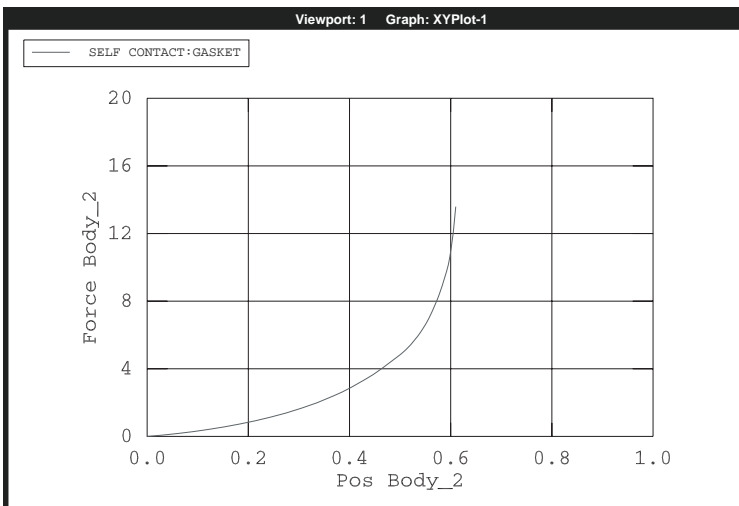
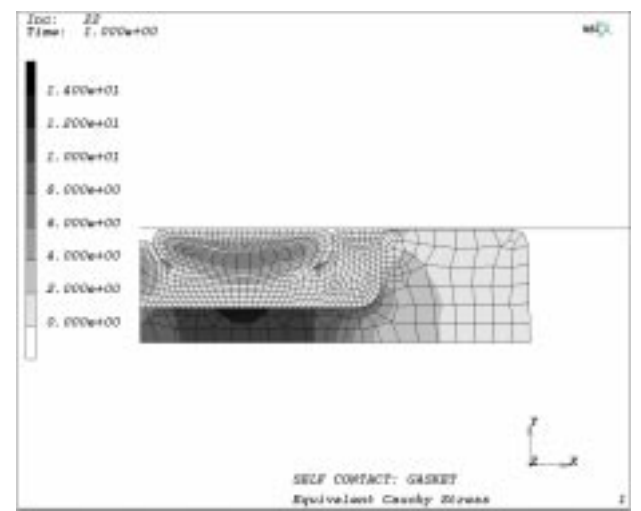
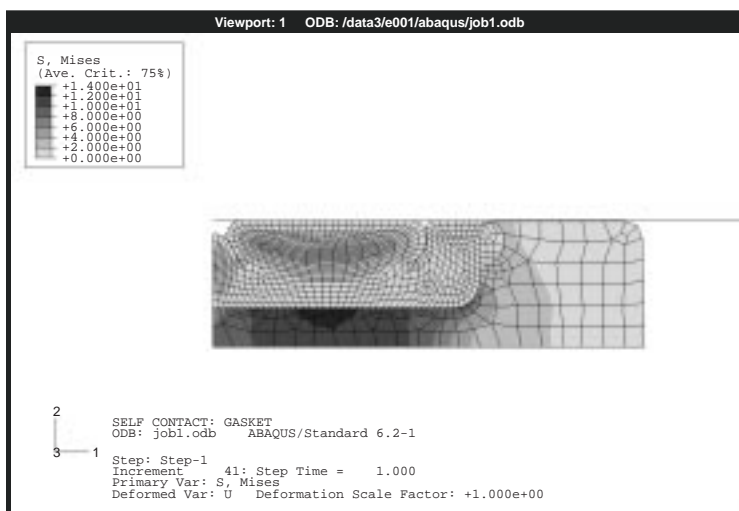
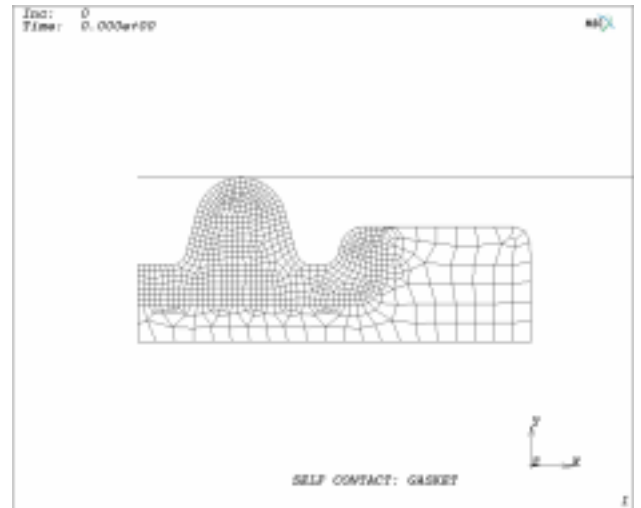
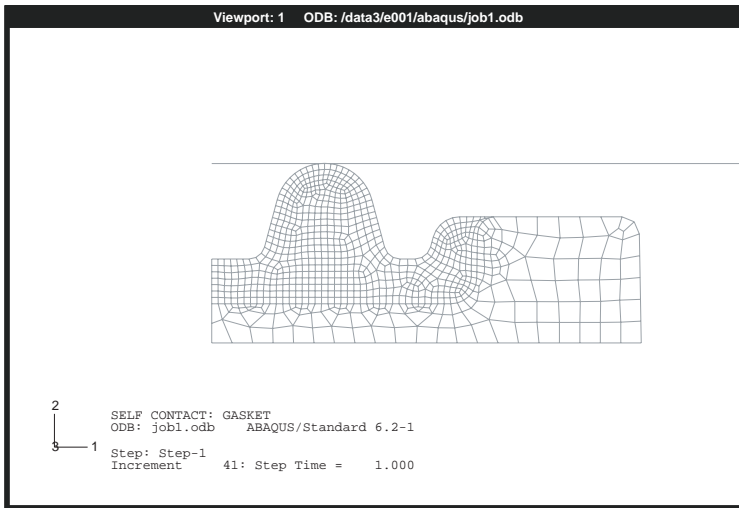
参考文献

- (1) 前田, 戦時期航空機工業と生産技術形成, 東京大学出版会, 2001.
- (2) M.Mooney, A Theory of Large Elastic Deformation, Journal of Applied Physics, 11, p.582, 1940.
- (3) 久保, ゴム弾性, 初版復刻版, 裳華房, 1996.
- (4) The Main Published Papers of Professor Kawabata, Kyoto University, 2001.
- (5) R.W.Ogden, Non-linear Elastic Deformations, Dover Publications, (1997).
- (6) Ogdenモデルによるゴム材料解析, Mech D & A News, vol .99-4, (株)メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス, 1999.
- (7) ゴム材料解析の実際, Mech D & A セミナーテキスト, (株)メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス, 2000.
- (8) 永田, 小林, 山下, 一軸試験による二軸伸長ゴム材料モデルの推定, 日本機械学会 第14回計算力学講演会, 128, 2001.
- (9) A.E.Green and J.E.Adkins, Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford at The Clarendon Press, 1960.
- (10) R.W.Ogden, Large Deformation Isotropic Elasticity - on the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids, Proceedings of the Royal Society of London, A.326, p.565, 1972.

表紙 英国ウェールズ, コンウィ橋, 1826年 Thomas Telford の設計, 写真 岡倉 禎志.

* ABAQUS はヒビット・カールソン・アンド・ソレンセン・インク殿の製品です。

* MSC.Marc は日本エムエスシー株式会社殿の製品です。



a. ABAQUS

b. MSC.Marc

Fig.9 ゴムガasketの押圧解析

株式会社 メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス
 〒182-0024 東京都調布市布田1-40-2 アクシス調布2階
 TEL 0424-82-1539 FAX 0424-82-5106
 comm@mech-da.co.jp http://www.mech-da.co.jp