

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

October 2001

World Order, Internal Conflict And Refugees, by Sadako Ogata, United Nations High Commissioner for Refugees. October 28, 1996 address to the John F. Kennedy School Of Government. In addressing the theme today, I would wish to go back to the Spring of 1991, when I first assumed the position of United Nations High Commissioner for Refugees. This was a time when we still used the phrase "New World Order". This phrase is now no longer fashionable, as we continue to be overwhelmed by the ceaseless disorder around the world and the immense human suffering it entails. Even those who foresaw order were still very much assuming the relevance of a concept



of international peace and security based on the Westphalian state system. I am certainly not going to question the Westphalian state system - there are many here in Cambridge from varying positions of realism and idealism who are struggling with this issue - but I must raise questions as to whether this system is providing us the necessary tools to address violent conflict, in particular within states, and human suffering. Just as the "New World Order" was being trumpeted, changes that began in 1989 and the internal conflict in Iraq after the Gulf War made clear that international relations theorists and observers had focused insufficiently on

海王丸/2000年7月 ニューヨーク

## 【特集】 中空材料の塑性座屈問題

- LS-DYNA による解析 -

## 【1】はじめに

中空の薄肉構造物の座屈解析は、航空機や圧力容器の設計に関連して発達してきました。この結果、流体との連成などごく一部の領域を除いては、座屈限界に対して十分に健全な設計ができる水準に到達しています。しかし、薄肉の部材が面外に変形して、しわが発生するような塑性座屈現象では、長柱座屈に代表されるような単純な分岐座屈のように、構造物の耐力が必ずしも一気に失われるわけではありません。座屈が進行する過程において荷重を適当な水準で推移させたり、座屈後の変形形状を安定な状態に導いて耐力を復元させたりするような工夫が可能です。

すなわち、単に崩壊ではなく、大きな変形を許容する技術という観点から座屈を見れば、変形によってエネルギーを吸収する構造としての利用が可能になります。この種の構造は、小型軽量でエネルギー吸収能が高く、また設置後のメンテナンスが不要であるのが、実用上の大きな利点となります。今回は中空円筒の軸方向圧縮を例にとり、基本的な座屈特性を評価した例を紹介します。

## 【2】中空円筒の軸方向座屈

中空円筒の軸方向座屈に対しては、Horton<sup>(1)</sup>や都井<sup>(2)</sup>らによる実験的あるいは解析的なまとまった研究があります。円筒が弾塑性材料である場合、肉厚  $h$  が平均半径  $a$  に対してごく薄ければ（例えば  $a/h >$  数百）弾性座屈を生じますが、一般的には塑性座屈がもたらされます。このときの座屈の過程は主に円筒の形状によって異なり、次のような3種類の形態があります<sup>(1)</sup>。

- (a) 軸対称座屈が発生し、軸対称モードを保つ。
- (b) 軸対称座屈が発生し、非軸対称モードに分岐する。
- (c) 当初から非軸対称座屈を生ずる。

試験機によって圧縮された円筒では、端部の半径方向変位は加圧板との摩擦により拘束されています。このためポアソン比に起因して、たる型の変形（バルジング）がもたらされます。上記の(a)と(b)で軸対称の塑性座屈が先行するのはこの理由によります。しかしながら、端部を拘束された状態でバルジングするためには円筒の周方向の伸張変形を伴うため、条件を整えば、より変形エネルギーの小さい不伸張型の変形、すなわち非軸対称モードに分岐します。

これが(b)の形態であり、円筒が長く、周方向の波長と同程度に軸方向の波長を許容できる場合に出現します。円筒が短いと周方向の波は育たず、(a)のように軸対称モードが保たれます。これら(a)と(b)の変形は  $a/h$  が小さい比較的厚肉の円筒で観察されます。

一方、薄肉、すなわち  $a/h$  が大きい場合には(c)の形態となります。このような薄肉円筒では弾性座屈応力が降伏限界を下回るので、塑性座屈とは呼ばない領域になることが少なくありません。薄肉円筒の長さを大きくしてゆくと、次第に円周方向の波数が小さくなり、極限は断面が円を保ったまま屈曲するオイラーの長柱座屈に帰着することが知られています<sup>(3)(5)</sup>。

## 【3】LS-DYNA による解析結果

材料はアルミニウムを想定し、形状は短円筒としました。短円筒を対象としたのは、長柱型の座屈を生じない条件下で単品の性能を評価するためです。また、肉厚は  $a/h=10 \sim 50$  の範囲で検討しました。

縦弾性係数 $E$	= 70,000 N/mm <sup>2</sup>	円筒の長さ $l$	= 50 mm
ポアソン比	= 0.3	平均半径 $a$	= 25 mm
降伏応力 $S_y$	= 100 N/mm <sup>2</sup>	肉厚 $h$	= 2.5 mm (a/h=10)
接線係数 $E_t$	= 7,000 N/mm <sup>2</sup>		= 1.25 mm (a/h=20)
			= 0.5 mm (a/h=50)

プログラムはLS-DYNAを使用し、以下の2つのタイプの要素で検討しました。

- ・完全積分 S/R ソリッド (ELFORM=2)
- ・Belytschko-Wong-Chiang シェル (ELFORM=10)

円筒の上下は剛体壁ではさみ、上側の剛体壁を 1000mm/sec で圧下しました。摩擦係数は 0.3 としました。マスケーリングは考慮せず、また、この程度の条件下では剛体壁の圧下速度の影響は小さいことを確認しています。

Fig.1, Fig.2は $a/h=10$ の結果を示します。軸対称のバルジングの座屈モードが先行した後、周方向の波数 $n=2$ の非軸対称モードに分岐することがわかります。図から明らかなように、シェル要素とソリッド要素では端部の挙動が大きく異なる点に注意が必要です。シェル要素では端辺の巻き込みが明瞭であり、非軸対称モードに移行した後も、図中の変位20mm付近まで巻き込みが維持されています。

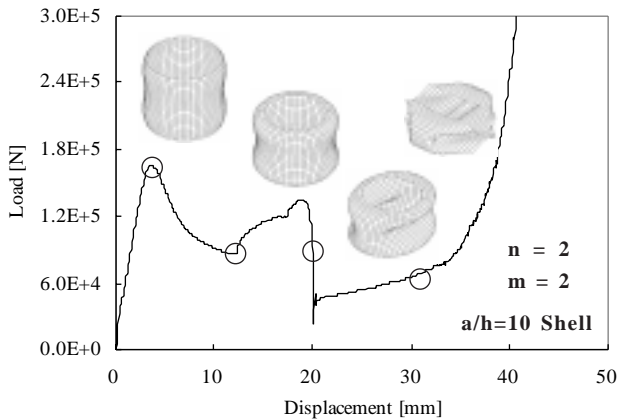


Fig.1 荷重 - 変位関係  $a/h=10$  シェル

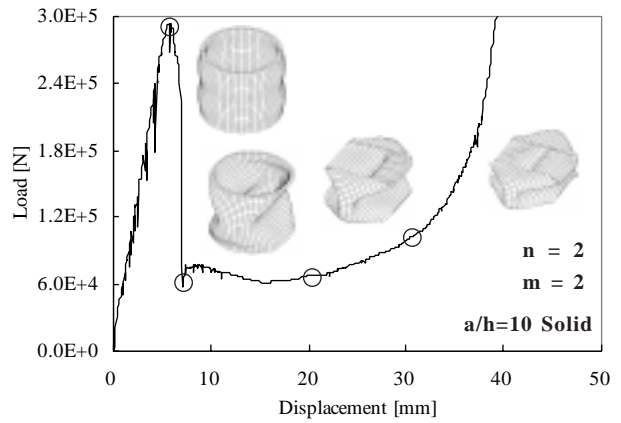


Fig.2 荷重 - 変位関係  $a/h=10$  ソリッド

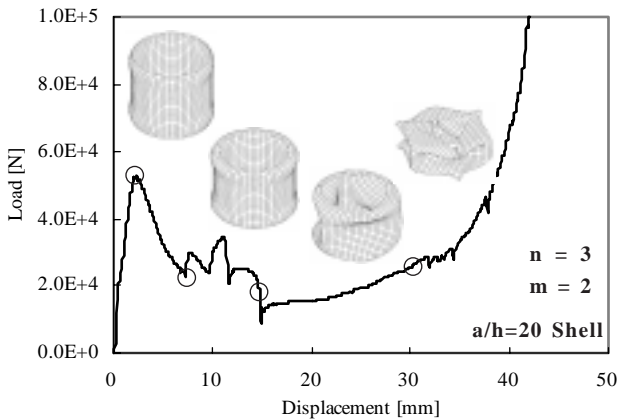


Fig.3 荷重 - 変位関係  $a/h=20$  シェル

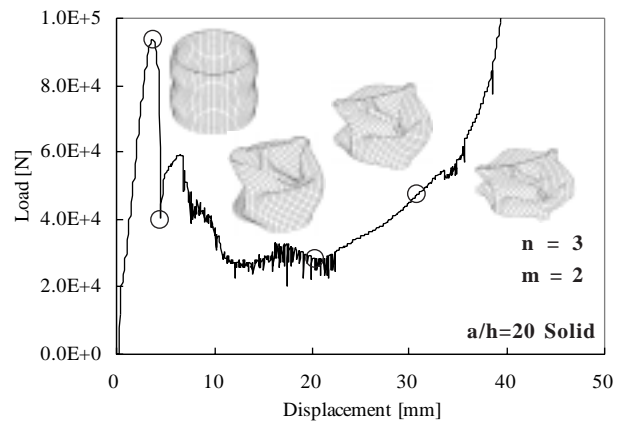


Fig.4 荷重 - 変位関係  $a/h=20$  ソリッド

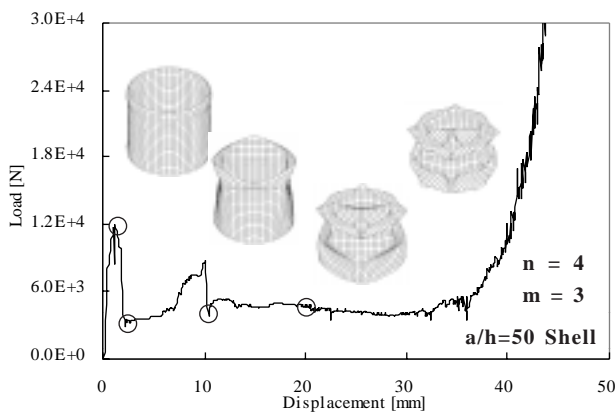


Fig.5 荷重 - 変位関係  $a/h=50$  シェル

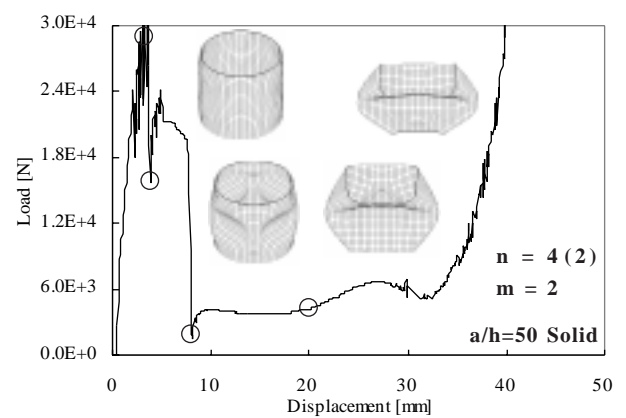


Fig.6 荷重 - 変位関係  $a/h=50$  ソリッド

これに対してソリッド要素では端部は面として剛体壁に接しているため、初期の巻きこみがなく、この結果、非常に高い初期荷重のスパイクを生じます。しかし、非軸対称モードが現れると端面にめくれを生じ、摩擦力が失われるため、軸対称モードから非軸対称モードへの切替は一気に進みます。この結果、荷重も急激に低下します。弊社の過去の検討によれば、この種の挙動についてはソリッド要素の方が現実に近いと考えられます<sup>(4)</sup>。従ってこの構造をエネルギー緩衝材として応用する場合は、初期の高い荷重を緩和することが重要な課題です。なお、図中に示すように、シェル要素、ソリッド要素共に、非軸対称モードについて周方向の波数 $n$ は2、また軸方向の半波数 $m$ は2です。

Fig. 3, Fig. 4 は $a/h=20$ の結果を示します。 $a/h=10$ に比べ荷重の水準はおよそ $1/3$ になっています。また後で評価するように初期の軸対称の波長は短くなります。非軸対称モードは $n=3$ の3角形です。肉厚が薄くなっているため、シェルとソリッドの差異はFig. 1, Fig. 2ほど明確ではなくなっていますが同一ではありません。

Fig. 5, Fig. 6 は $a/h=50$ の結果です。薄肉となった結果、シェル要素では非軸対称のモードが軸方向に複数形成されています。変形図からわかるようにこの複数のモードは上端から順にしわが折り畳まれるように形成され、この間の荷重はほぼ一定の水準に保たれます。荷重の絶対的な水準は高くありませんが、エネルギー緩衝材の動作ストロークをかせぐ場合には、このような挙動は有用です。

しかし、Fig. 6のソリッド要素の結果を見ると、非軸対称モードの波数が $n=4$ から $n=2$ に途中で変化しています。これは軸方向荷重の水準が下がるに従って摩擦による拘束が弱まり、挙動が不安定になることを示しています。従って薄肉の円筒の場合は、両端にフタを設けるか、ハニカム構造のように複数を連結して使用するような対処が必要です。なお、 $n=2$ のモードを生じて屈曲に至るような挙動の発生については、理論解との比較を検討しているので、後の解説を参照して下さい。

#### 【4】理論解による評価（その1：初期対称座屈）

円筒シェルの軸方向座屈に関しては過去に多数の研究がありますが、特に肉厚が薄い場合には初期不整の影響が強く現れ、厳密さを追うほど統一的な議論をすることが妨げられるのが現実ではないかと考えられます。エネルギー吸収材として座屈を利用しようとする場合には、このような初期不整による不確定性は排除することが必要です。

FEMの結果からも明らかなように、 $a/h$ が10程度の厚肉であれば、座屈の挙動は比較的安定になります。このような厚肉の円筒シェルであれば座屈の臨界荷重は増大し、弾性座屈ではなく材料の降伏による変形が先行するようになります。また端面の摩擦によって円筒の半径方向の膨張が妨げられるので、初期の座屈形状は軸対称となります。従って、軸対称の塑性座屈を評価することが今回のFEM解を評価するための第1歩となります。

軸対称座屈の理論解としては、Timoshenkoの著書<sup>(3)</sup>が最も代表的なものです。エネルギー法と呼ばれる伝統的な手順によれば、座屈による変形形状を想定し、外力のなす仕事と、変形に伴う内部のひずみエネルギーの増加量を等置し、外力の最小値を見出すことによって座屈荷重と座屈モードを見出します。最初に変形形状を仮定することから始めるので、この手法による解は近似解ですが、極めて実用的な方法です。

今回の円筒シェルについては、半径方向の変位として(1)式が仮定され、Fig. 7に示すようにシェルの母線が $m$ 個の半波形で変形するとされています。

$$w = -A \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots (1)$$

座屈応力の解だけを示すと(2)式の通りです。座屈応力は円筒の半径と肉厚の比 $a/h$ で定まり、長さ $l$ には依存しないという重要な結果が導かれます。また、このときの変形の半波長は $l/m$ であり、(3)式によって表されます。

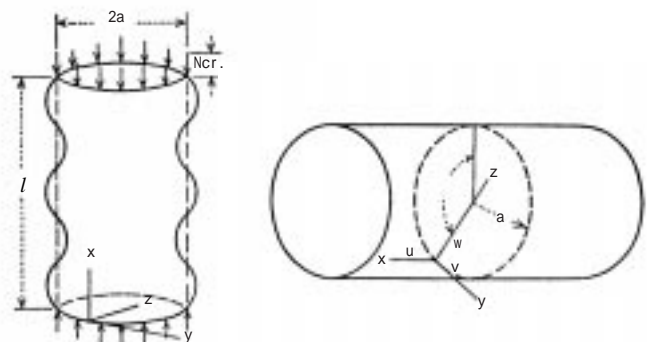


Fig. 7 円筒シェルの軸方向圧縮

弾性座屈応力  $\sigma_{cr} = \frac{hE}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots (2)$

半波長  $\frac{l}{m} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 h^2}{12(1-\nu^2)}} \approx 1.72\sqrt{ah} \dots (3)$   
 (  $\nu = 0.3$  の場合)

(2) 式は弾性状態に対する解ですが、エネルギー法において初期に仮定する変形を、均一な圧縮変形が与えられた状態からの変位と置き直せば、(2) 式の結果をそのまま塑性域に拡張して用いることができます。この場合、(2) 式の縦弾性係数 E に替えて Fig. 8 に示す各種の弾塑性勾配を適用します。代表的なものに以下の 3 つがあります<sup>(2)(3)</sup>。

壁面の軸方向の曲げ剛性のみを接線係数  $E_t$  に置換した Timoshenko の解：

$$\sigma_{cr} = \frac{h\sqrt{EE_t}}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots (4)$$

曲げだけでなく、円周方向の変形も接線係数  $E_t$  に支配されると考えた接線係数理論による解：

$$\sigma_{cr} = \frac{hE_t}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots (5)$$

セカント係数  $E_s$  を用いた塑性変形理論による Gerard の解：

$$\sigma_{cr} = \frac{h\sqrt{E_s E_t}}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots (6)$$

今回の結果をこれらの式と比較すると Fig. 9 のようになります。(6) 式は加工硬化の影響が大きい場合に実測値と良い一致を示すと言われており<sup>(2)</sup>、今回もシェル要素の結果はこれに近くなっています。しかし、ソリッド要素の結果は端面の効果によってその 2 倍近い値を示しており、これらの理論解から簡単に推定することはできません。FEM と実測の対比が必要です。

今回のシェル要素の解析によって得られた軸対称の座屈波形を Fig. 10 に示します。図から読み取れる半波長の長さ、(3) 式の対比を Table1 に示します。両者は良好な一致を示し、波長に関しても弾性座屈理論を適用して大過ないことがわかりました。

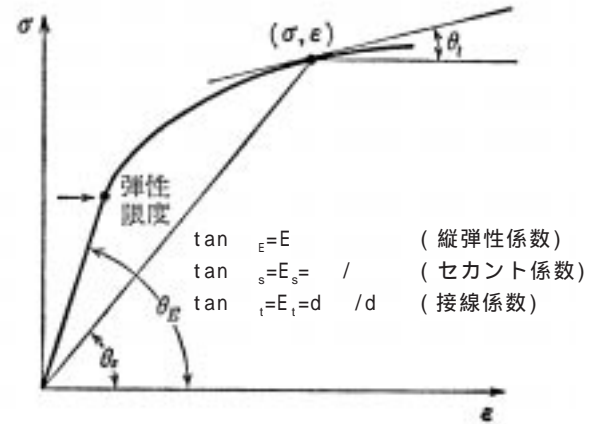


Fig.8 加工硬化曲線の例

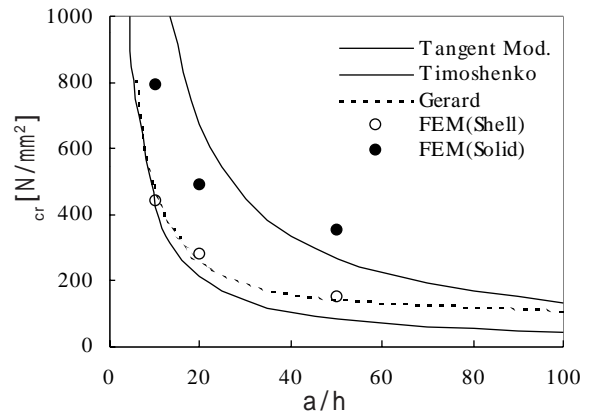


Fig.9 軸対称塑性座屈応力  $\sigma_{cr}$  と a/h の関係

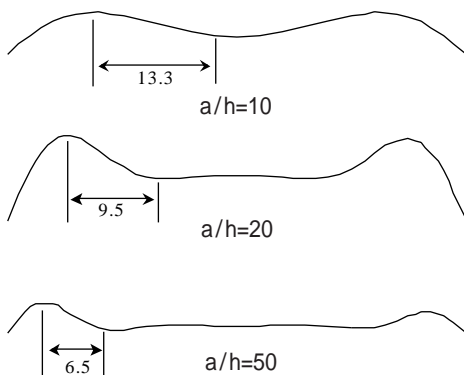


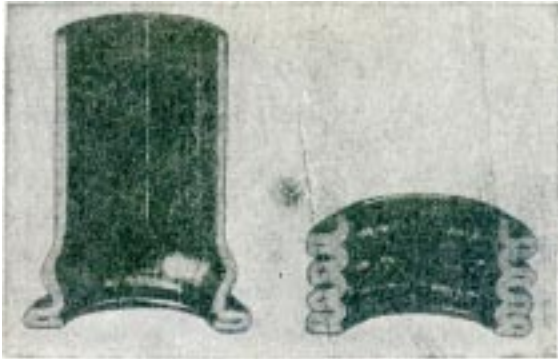
Fig.10 軸対称座屈波形 (FEM)

Table1 軸対称モードの半波長 (l/m)

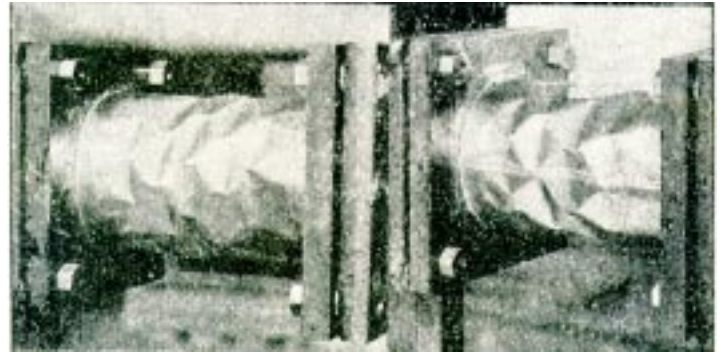
a/h	[mm]	
	理論解	FEM (Shell)
10	13.6	13.3
20	9.6	9.5
50	6.1	6.5

## 【5】理論解による評価（その2：非対称座屈）

円筒が厚肉である場合には、円筒は初期の軸対称座屈の形状を保ったまま座屈が進行しますが、薄肉になると非対称座屈に分歧するようになります。このような傾向は古くから知られており、Fig.11はTimoshenkoの著書<sup>(3)</sup>に掲載されている1920～1930年代の実験の結果<sup>(6),(7)</sup>です。



a. 対称座屈(厚肉)<sup>(6)</sup>



b. 非対称座屈(薄肉)<sup>(7)</sup>

Fig.11 円筒の軸方向圧縮試験（1920～1930年代）

非軸対称座屈の挙動を評価するためには、エネルギー法に替えて、円筒シェル一般的な変形を記述する微分方程式から検討する必要があります。いま、長さ $l$ 、半径 $a$ 、肉厚 $h$ の円筒シェルがFig.7の表記に従って軸方向に一様に圧縮されるとき力の釣合い式は次のようになります<sup>(3)</sup>。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{a(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \alpha \left[ \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{a \partial \theta^3} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - a \phi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \dots (7)$$

$$-a \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \alpha \left[ \frac{\partial^3 v}{a \partial \theta^3} + (2-\nu)a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + a^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{a \partial \theta^4} + 2a \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right] = 0$$

ただし、 $\alpha = \frac{h^2}{12a^2}$        $\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh}$

は半径と肉厚から定まる形状のパラメータ、 $\phi$ は無次元化された圧縮応力（圧縮を正としている）を表します。 $N_x$ は、端部の辺に加えられる軸方向の線荷重です。ここで、

$$\nu = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{a} = \text{定数} \quad \dots (8)$$

を仮定すると(7)式の釣合いは満足され、その解は、圧縮されて半径方向に一様に膨張した結果を表します。座屈の発生を考えるために、この一様に圧縮された釣合い状態からの微小変位 $u, v, w$ を以下のように仮定します。

$$u = A \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{l} + B \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{l} + C \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots (9)$$

これは、座屈によってシェルの母線は $m$ 個の半波形、また円周は $2n$ 個の半波形に細分化されるような変形モードが生ずることを想定しています。境界条件として(10)式のような単純支持辺の条件を与え、(11)式のような軸方向の波数を規格化したパラメータを用います。

$$w = 0 \quad \text{および} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \dots (10) \quad \lambda = \frac{m\pi a}{l} \quad \dots (11)$$

これらの条件を(7)式に与え、その係数の行列式が0になる条件を求めると、高次の微小量を見捨てて次の結果が得られます。

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \frac{R}{S} \quad \dots(12)$$

ここでRとSは以下の通りです。

$$R = (1-\nu^2)\lambda^4 + \alpha[(n^2 + \lambda^2)^4 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4 n^2 + 2\lambda^4(1-\nu^2) - \lambda^2 n^4(7+\nu) + \lambda^2 n^2(3+\nu) + n^4 - 2n^6] \quad \dots(13)$$

$$S = \lambda^2 \cdot \alpha(n^2 + \lambda^2)^2 + \frac{2}{1-\nu}(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2)[1 + \alpha(n^2 + \lambda^2)^2] - \frac{2\nu^2\lambda^2}{1-\nu} + \frac{2\nu}{1-\nu}(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2)[n^2 + (1-\nu)\lambda^2] \cdot \mu \quad \dots(14)$$

(12)～(14)式はTimoshenkoの著書<sup>(3)</sup>からの抜粋です。その中ではFlüggeの原著<sup>(5)</sup>から、この式の計算結果がFig.12のように引用されています(原著と式の形式は若干異なる)。この図は、横軸に軸方向の半波長、縦軸に座屈荷重を規格化して示し、周方向の波数をパラメータとしています。(7)式の(すなわち半径と肉厚)とポアソン比が与えられればFig.12を計算することができ、得られた曲線群は出現し得る座屈モードを表しています。この図から円筒の長さに応じて以下のような結論を導くことができます。

### 【5.1】 極めて短い円筒：薄板の座屈

Fig.12の横軸の左側の限界である一点鎖線は、円筒の長さが極端に短い場合に相当します。この状態は、円筒の周を展開して得られる薄板(n=0)を軸方向に圧縮するのと同様です。長さが短いので(11)式で定義されるφが大という仮定を与えて(13)式と(14)式を単純化し、またn=0とすると、(12)式の最小値はEulerが薄板の一方曲げ(要素ストリップ)に対して導いた以下の座屈応力に帰着します。このときの軸方向の半波数はm=1です。

$$\text{要素ストリップの座屈: } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2) l^2} \quad \dots(15)$$

### 【5.2】 極めて長い円筒：長柱の座屈

Fig.12の横軸の右側の限界である破線は、円筒の長さが極端に長い場合に相当します。この状態では、円筒はその断面を円形に保持(n=1)したまま、はりのようにたわんで座屈します。(11)式で定義されるφが小、またn=1の条件を与えると、(12)式の最小値はEulerが長柱に対して導いた以下の座屈応力に帰着します。このときの軸方向の半波数はm=1です。

$$\text{円筒の長柱座屈: } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E a^2}{2l^2} \quad \dots(16)$$

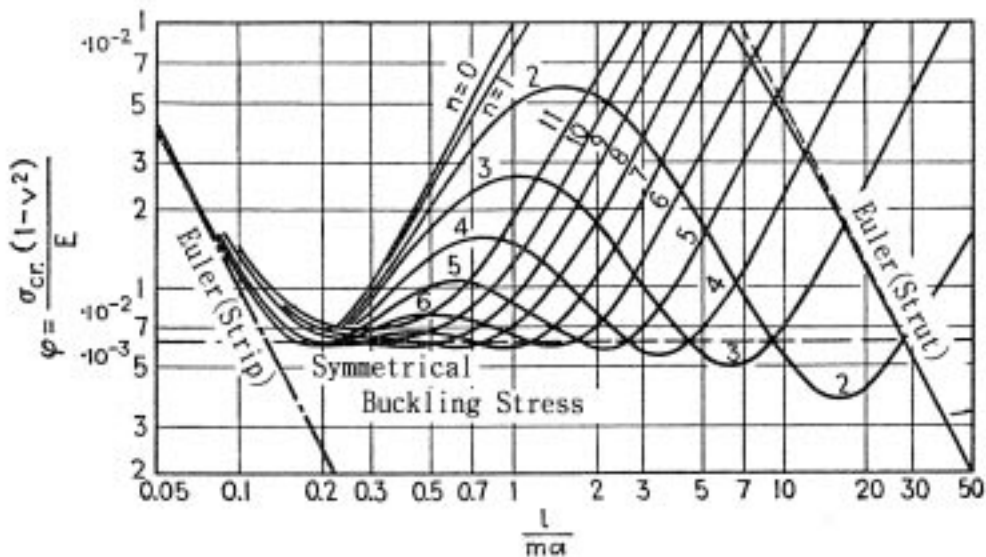


Fig.12 非軸対称座屈の発生条件<sup>(3),(5)</sup>

なお、Fig.12の右側の限界よりもやや左側の領域でn=2(断面が楕円形に変形)の曲線に極小値があるのは、円筒が長い場合に、このようなモードが現れ易いことを示しています。ホースを軸方向に押し、断面が楕円形に扁平化しながら屈曲するような現象がこれに相当します。このモードの軸方向の半波数mは小さいのが通常です。

例えば、今回の解析結果を見ても、Fig.6ではn=4で始まった変形が途中からn=2に変化し、座屈荷重が大幅に低下する例がありました。今回のように円筒を単に摩擦だけで保持して圧縮すると、特に薄肉の場合は端部の拘束が弱いので自由に變形し、結果的に長い円筒を押しした場合と大差がなくなるため、屈曲による座屈が現れてしまうと考えられます。理論解からは、このようなn=2に対する極小値は、対称座屈荷重の $(n^2-1)/(n^2+1)=3/5$ になることが知られており<sup>(3)</sup>、Fig.6を見ても初期のスパイク $3 \times 10^4$  Nの3/5程度の荷重でもたつきながら、n=2のモードによる屈曲に落ち込んでいく様子がわかります。

### 【5.3】 中間的な長さの円筒

中間的な長さの円筒では、Fig.11のbに示すような座屈形状が現れます。このような変形では軸方向の波長は比較的短いので、(11)式で定義される $\alpha$ の2乗が大きな数になるという前提の下に、(13)式と(14)式のそれぞれ括弧の中の第1項までを残すと、(12)式を(17)式のような簡単な形にすることができます。なお、この式は、n=0とすると対称座屈の結果に帰着します。

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \alpha \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2} \quad \dots(17)$$

この式は、nと $\lambda$ の関係(円周方向と軸方向の変形の対応関係)が(18)式の条件を満たすとき、(19)式に示す最小値を与えます。すなわち、(18)式が座屈モード、(19)式が座屈応力を表します。

$$\text{最小値出現の条件 (座屈モード)} : \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha}} = \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad \dots(18)$$

$$\text{最小値(座屈応力)} : \sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad \dots(19)$$

これより、非対称座屈の座屈応力は、対称座屈と同様に円筒の長さには無関係で、かつその値は対称座屈の結果に等しいという重要な結論が導かれます。但し(18)式において、nが正値となる条件、すなわち非対称座屈が成立する条件は次のようになります。

$$\text{非対称座屈の成立条件} : \lambda^2 < 2a\sqrt{3(1-\nu^2)}/h \quad \dots(20)$$

例えばFig.12の例で計算すると、横軸に関して $l/ma > 0.18$ の領域で非対称座屈が発生することをこの式は示しています。いま、ストリップの座屈を生じている極端に短い円筒の長さを徐々に長くする状況を考えましょう。軸方向の半波数は当初m=1であるので、 $l/a$ が0.18を超えると、周方向に波数nの波(ローブ)が発生し、軸長の増加に伴ってnは増加します。しかし、nは無限に増加する訳ではなく、都井<sup>(2)</sup>はやはり(18)式に基づいて次のように上限があることを示しています。まず、軸方向波長の周方向波長の比を(21)式のように定義し、これを(18)式に代入すると(22)式が得られます。

$$\frac{2l}{m} = \beta \frac{2a}{n} \quad \dots(21) \qquad n^2 \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad \dots(22)$$

(22)式で、 $\beta + 1/\beta$ の最小値は2( $\beta=1$ のとき)であるので、nは以下の条件を満たす必要があります。

$$2n^2 \leq \frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad \dots(23)$$

Fig.12の例に対して(23)式を計算すると $n \leq 8.8$ となります。すなわち、円筒が長くなり周方向の波数が8に達すると、次は軸方向の半波数mが1から2に増加すると同時に、nは0(対称座屈)に戻ります。そして、再びnが増加して8に達すると、次はm=3になるという挙動を繰り返すこととなります。この間、座屈応力の値は、(19)式の一定値に保たれます。

### 【5.4】 FEM 解との対応

5.3 に示した非対称座屈に対する解が弾塑性座屈に対しても適用できるか検討しました。Fig. 13 は今回の形状  $a/h=10 \sim 50$  について(12)式を計算した結果です。縦軸の座屈応力を規格化するために、 $E$  に替えて  $\sqrt{E_s E_t}$  を使用しました。図中のプロットは FEM 解を示します。(12)式が意図している座屈発生条件に、FEM 解は沿っていることがわかります。

また、Table2 は周方向波数  $n$  について(18)式および(23)式から推定される結果と FEM 解を比較したものです。 $a/h=10, 20$  については良い一致が認められます。 $a/h=50$  は FEM の方が波数を小さく与えています。これは周方向のメッシュ分割が不足し、波数を表現するのに不十分であったことに一因があります。メッシュ分割を細かくすると、波数は改善されますが、座屈後の挙動が不安定となったため、今回はこの薄肉のケースについてはそれ以上の検討をしていません。

以上の検討結果より、非対称座屈に対しても、弾性の理論解を弾塑性領域に拡張して大過ない結果となることがわかりました。但し塑性座屈では、しわが折り畳まれるように進行するので、円筒が十分に長ければ  $n$  はその上限値、すなわち(23)式で定まるのが実態と考えられます。しかし、今回のように円筒が短い場合は、 $m$  の増加に制約があるので、 $n$  は(18)式に従ってより小さい値にとどまります。これらの知見に対しては、更に検討が必要です。

### 【6】 初期不整による荷重 - 変位特性の改善

$a/h=10$  の厚肉円筒の場合、Fig. 2 に示したように端部は面として剛体壁に接しているため、初期の巻きこみがなく、非常に高い初期荷重のスパイクを生じます。この構造をエネルギー緩衝材として応用する場合、このスパイクを緩和することが重要な課題です。そこで、上端に軸方向半波長  $(1/m)$  の  $1/2$  程度の切欠きを持たせることで、初期荷重のスパイクの緩和を図りました。

2 箇所切欠きを入れた結果を Fig. 14 に示します。2 箇所切欠きを持たせることにより、本来生じるべき 2 波の非軸対称モードをスムーズに誘導しています。また、バルジング変形による初期の周方向の伸張座屈が排除され、初期荷重のスパイクを  $1/2$  程度に減少させることが可能となりました。

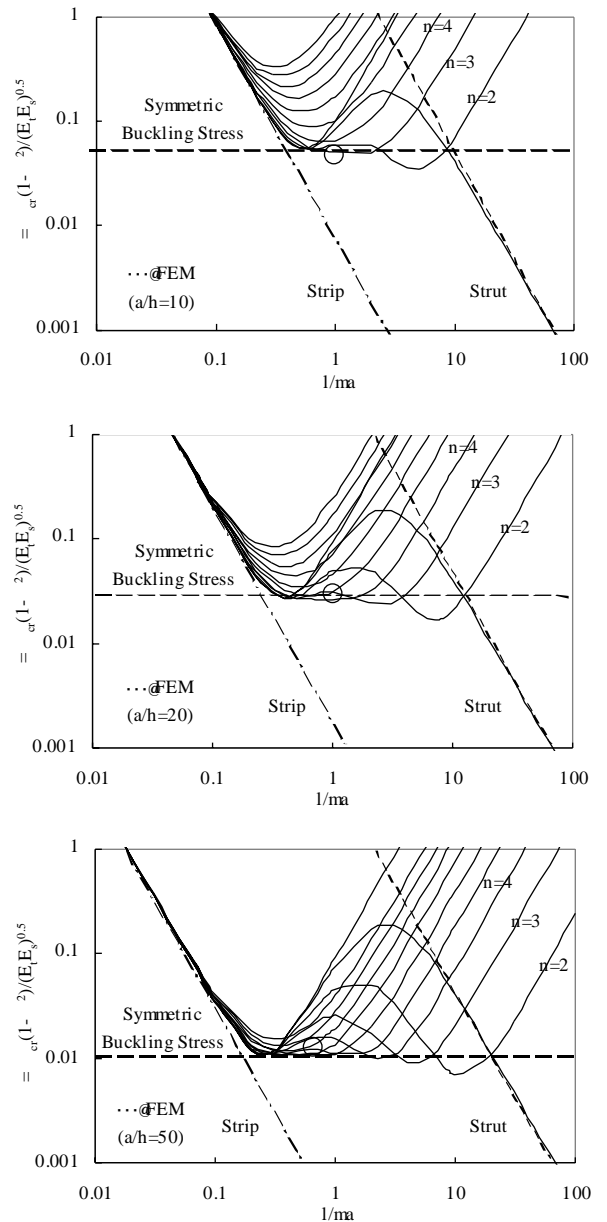


Fig. 13 非軸対称座屈の理論解との比較

Table2 周方向波数  $n$

a/h	理論解(18)式			理論解(23)式 (nの上限値)	FEM 解 (Shell)
	m=1	m=2	m=3		
10	2 (2.56)	2 (2.86)	2 (2.21)	2 (2.87)	2
20	3 (3.21)	3 (3.96)	4 (4.01)	4 (4.07)	3
50	4 (4.21)	5 (5.52)	6 (6.19)	6 (6.43)	4 (5) メッシュが細かい場合は5。 座屈後の挙動が不安定。

- ・    が FEM で出現した  $m$  に対応する値。
- ・ ( ) 内の計算結果を切捨てて  $n$  とした。

3箇所にて切欠きを入れた結果を Fig. 15 に示します。このケースでも初期荷重のスパイクは減少しています。しかし3箇所にて切欠きを持たせることにより、本来生じるべき2波の非軸対称モードではなく、3波の非軸対称モードに誘導され、変形の進行の様子、及び荷重 - 変位関係は不安定となりました。

すなわち、初期不整を利用して初期の過大な荷重を低減するには、非軸対称モードで現れるべき変形形状を予測し、

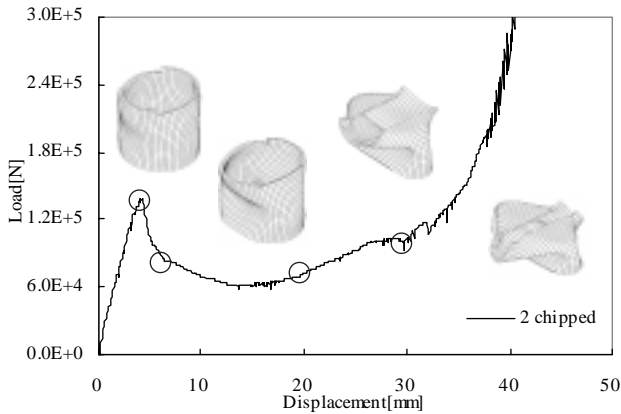


Fig.14 荷重 - 変位関係 切欠き 2つ

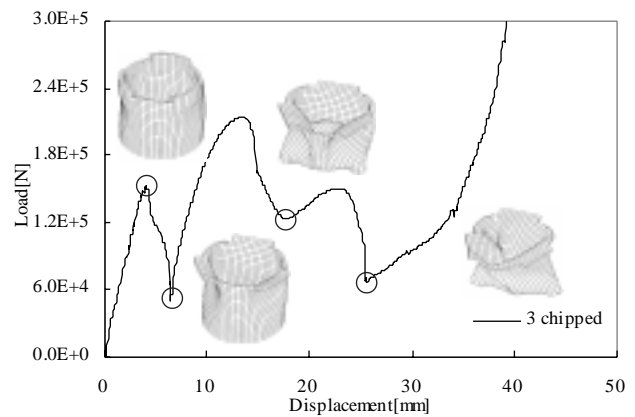


Fig.15 荷重 - 変位関係 切欠き 3つ

その変形を滑らかに誘導できるような不整を正しく計画することが必要です。

## 【7】結論

LS-DYNA を用いて中空円筒の軸方向圧縮解析を行いました。シェル要素とソリッド要素を用いて座屈挙動を評価した結果、シェル要素による解は古典的な弾性座屈理論、及びその延長上にある塑性座屈理論によって、大筋を説明することができることを確認しました。しかし、円筒端部の仕上げが座屈挙動に及ぼす効果など、実用設計上の知見を得るにはソリッド要素による解析も重要であり、今後の研究が待たれます。

### 参考文献

- (1)W.H.Horton, et al., Nonsymmetric Buckle Patterns in Progressive Plastic Buckling, Proc. Soc. Exp. Stress Analy., 23-2, p433, 1966.
- (2)都井, 鋼構造の離散化極限解析, 培風館, 1990.
- (3)S.P.Timoshenko and J.M.Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
- (4)根岸, 他, 熱可塑性エラストマーハニカム成形品の塑性座屈解析, 第13回計算力学講演会, 130, 2000.
- (5)W.Flugge, Stress in Shell, Springer-Verlag, 1960. (英語版)
- (6)J.W Geckeler, Z. angew. Math. u. Mech., 8, p.341, 1928.
- (7)L.H.Donnell, Trans. ASME, 56, 1934.

表紙 海王丸, ニューヨーク, 2000年7月, Jeff Christensen, REUTERS.  
<http://gos.sbc.edu/o/ogata.html>