

vol. 2000-2

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.
June 2000



ドイツ 6月

【特集】 シェル構造物の非線形解析

- 座屈問題 -

【 1 】 構造物の不安定現象

1.1 不安定現象の分類

構造物が外力によって弾性的な変形を起こしているとき、外力と内部に生じた部材力とはつり合っているばかりでなく、通常は安定した平衡状態となっています。ところが、ある種の変形様式では、変形や外力が限界を超えると平衡状態が破れ、まったく別の形をした安定平衡状態に移行したり、あるいは急激に変形が進み破壊したりすることがあります。このような現象は一般に弾性安定とよばれ、Fig.1に示すような3つのタイプがあることが知られています。

まず図中(a)は、荷重がある値に到達すると、いままで存続してきた変形Iから、全く新しい変形様式IIに移るような不安定現象です。荷重-変位曲線上でこの枝分かれを生ずる点を分岐点と呼びます。一般的には、この現象を狭い意味で座屈と称することが多いと思います。

また、図中(b)は屈服と呼ばれ、変形モードは変わらないものの荷重が極大値を示す現象です。極大値以降では、荷重(反力)が減少するにもかかわらず変形が増大するので、構造物は破壊に至ります。

図中(c)は飛び移りと呼ばれる現象です。荷重-変位曲線に極大値と極小値があり、荷重制御の場合、往路ではBからD、復路ではCからAに形状が飛び移ります。飛び移り後は荷重が回復して安定な状態となるので、石油缶のフタやキーボードのスイッチなど、クリック感を持たせたい部品に積極的に利用されることがあります。

1.2 座屈点の分類

これらの不安定現象を解析するためには、座屈点すなわちFig.1に現れる P_{cr} を数値的に安定に処理することが必要です。この点では剛性が0となったり、変形が一義的に定まらないといった問題を生ずるからです。

ここでは座屈点の発生について検討し、分類してみましょう⁽¹⁾。荷重-変位関係を増分的に取扱うとすると、その方程式は

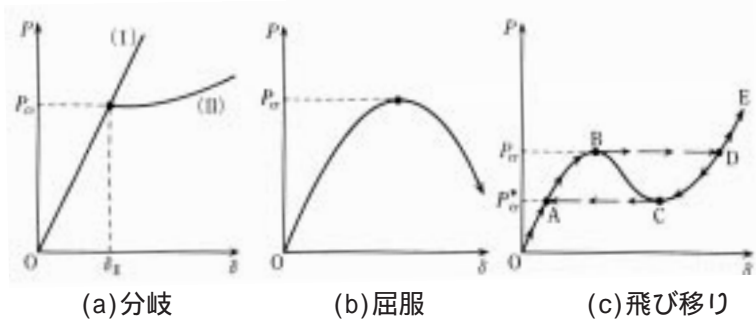


Fig.1 構造物の不安定現象

$$[K]\{\dot{d}\} = \{f\} \quad \begin{array}{l} [K]: \text{増分区間における剛性行列} \\ \{f\}: \text{荷重モード} \end{array} \quad \begin{array}{l} \{\dot{d}\}: \text{変位増分} \\ \quad : \text{荷重パラメータの増分} \end{array} \quad \dots (1)$$

いまFig.2の点Iにおいて剛性マトリックス $[K]$ の行列式 \det の値が0でなければ(1)式は(2)式となり、次の増分ステップに対して変位を定め得ます。しかし、そうでない場合には変位増分が一義的に定まらず座屈点となります。

$$\text{安定} \quad \{\dot{d}\} = [K^{-1}]\{f\} \quad \dots (2)$$

$$\text{不安定 (座屈点)} \quad \det[K] = 0 \quad \dots (3)$$

座屈点の分類を行うために、Iの時点における座標軸の変換を行い、マトリックス $[K]$ の対角化を試みます。まず次式で与えられる変位および外力ベクトルの変換マトリックス $[T]$ を導入します。

$$\{\dot{d}\} = [T]\{\dot{u}\}, \quad \{f\} = [T]\{g\} \quad \dots (4)$$

マトリックス $[K]$ を対角化するためには、 $[K]$ の固有値 c_i に対応する正規化された固有ベクトル $\{t_i\}$ を用いて、次のように $[T]$ を作ればよいことになります。

$$[T] = [t_1, t_2, \dots, t_n] \quad \dots (5)$$

$[K]$ は実対称マトリックスであるので、上式の作成は常に可能であり、さらに、 $[T^{-1}] = [T]^T$ が成り立っています。(4)式を(1)式に代入します。

$$[c]\{\dot{u}\} = \dot{\lambda}\{g\} \quad [c] = [T]^T[K][T] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ & c_2 \\ 0 & c_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & \\ \hline & \Delta c \end{array} \right] \quad [g] = [T]^T\{f\} = \begin{Bmatrix} t_1 \cdot f \\ t_2 \cdot f \\ \vdots \\ t_n \cdot f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ \Delta g \end{Bmatrix} \dots\dots (6)$$

この(6)式をマトリックス表示すると $\begin{bmatrix} c_1 & \\ \hline & \Delta c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} g_1 \\ \Delta g \end{Bmatrix} \dots\dots (7)$

c_1 をマトリックス $[K]$ の最小固有値とすると、座屈点においては(3)式が成立しているため、(8)式となります。また、このときに(7)式に示すつり合いが成立するためには(9)式を満足しなければなりません。

座屈点では $c_1 = 0 \dots\dots (8)$ 同時に $g_1 = 0 \dots\dots (9)$

この $\dot{\lambda}$ と g_1 とを利用すると、座屈点をFig.3のように分類することができます。また図中では荷重 - 変位曲線の上に座屈点を示しています。なお、分岐点 $g_1 = 0$ では、(6)式の定義により(10)式となっているので、最小固有値 c_1 に対応する固有ベクトル $\{t_1\}$ と荷重モード $\{f\}$ は直交しているという重要な結論が導き出されます。例えば、細長い柱を軸方向に圧縮すると、横たわみを生じて分岐することが理解できるでしょう。

分岐点では $g_1 = t_1 \cdot f = 0 \dots\dots (10)$

久田・野口先生の著作⁽³⁾によれば、座屈点の物理的な解釈は整備されてTable 1のようになります。

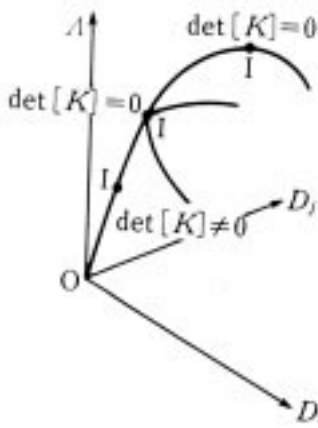


Fig.2 増分区間における剛性マトリックス $[K]$

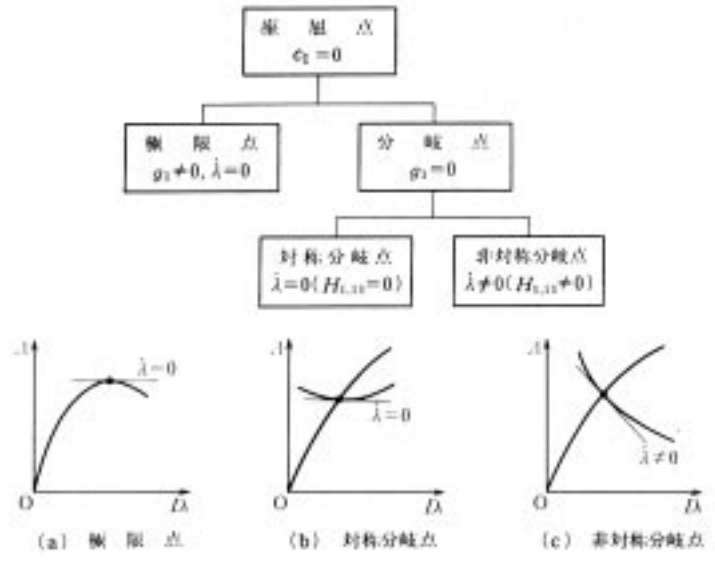


Fig.3 座屈点の分類

Table 1 座屈点での挙動

| | 固有モード / 荷重モード | 固有モード / 座屈点を超える際の変位増分モード |
|-----|---------------|--------------------------|
| 極限点 | 直交しない | 一致 |
| 分岐点 | 対称 | 一致 |
| | 非対称 | 一致しない |

【 2 】 座屈問題の解析と問題点

2.1 座屈固有値の解析

座屈の臨界荷重と固有モードを固有値解析によって求めるのは、最も実用的な手段です。実際、オイラーの長柱座屈のように座屈前の挙動が線形に近い現象に対しては正確な評価が期待できるので、適切な裕度を見込んだ上で各種の設計用の規格に取り入れられています。

しかし、寸法の公差や荷重のアンバランスなど、いわゆる初期不整と総称される構造上の不完全性は、座屈荷重の大幅な低下をもたらします。このため、設計規格において座屈の理論解を適用する場合には2倍を超えるような裕度を求められることが少なくありません。

一方、Table 1 から推測されるように、座屈点を越える際の変形モードは必ずしも固有モードとは一致しないという本質的な問題があります。実際、複雑なシェル構造では、臨界荷重近傍に多数の固有モードが存在します。現実の負荷プロセスでは、多数の変形モードのうち、特定のものが選択的に進行するので、初期の固有モードを漏れなく抽出するだけでなく、選別する判断が必要です。一方、計算のアルゴリズムに関しては、全ての固有モードを効率的に求められるよう、一般的な逆べき乗法に替えて、ランチョス法などの大規模計算に向く手法を採用するような工夫も必要となります。

また、座屈が発生する荷重領域では、薄板の曲げに代表されるような大変形効果や塑性化が共存するのが通常です。これらの非線形性は、座屈発生前といえども荷重 - 変位関係の直線性を損わせるので、本来、線形を対象としている固有値解析をそのまま適用することはできません。もちろん、接線剛性を用いた固有値解析も可能ですが、現実的な運用は難しいと考えられます。

2.2 弧長法による荷重増分解析

このような座屈固有値解析の不都合を補完するには、増分解析により座屈後 (post-buckling) も含めて変形挙動を追跡するのが有効です。しかしこの解析を荷重制御型で行う場合は、極値以降の領域で座屈荷重値そのものも未知数となるため、変形の発散を拘束するための工夫が必要となります。一般的には弧長法と呼ばれる手法がMARC*などの汎用FEMには用意されています。この手法を適用すると、特にFig.1(c)に示すような飛び移りの現象は正しく評価することが可能です。

これに対して分岐解析では、Fig.1(a)のIに示すような主径路上で座屈点 P_{cr} を探し、分岐径路IIに変形を誘導することが必要です。しかし弧長法そのものには座屈点の探査機能はないので、分岐点を見過ごし、主径路Iの上でのみ平衡解を探しているようなことが少なくありません⁽³⁾⁽⁴⁾。このような場合は、解析途中のわずかな数値の乱れが不整として作用し、径路IとIIの間を解が行きつ戻りつするような結果となります。

Fig.4(a)はWilliams & Yoshida's toggleと呼ばれるもので、図中に示すように分岐点aと極限点bが共存するように工夫された問題です⁽⁵⁾。固有モードからわかるように、分岐点aでは非対称、極限点bでは対称の変形モードが現れます。座屈発生後、十分に変形が進むと、形状が反転した安定な曲げ状態となるので、aの分岐径路は再びbの主径路に合流します。

Fig.4(b)は網状のシェル構造に対して同種の現象を評価した例⁽¹⁾です。

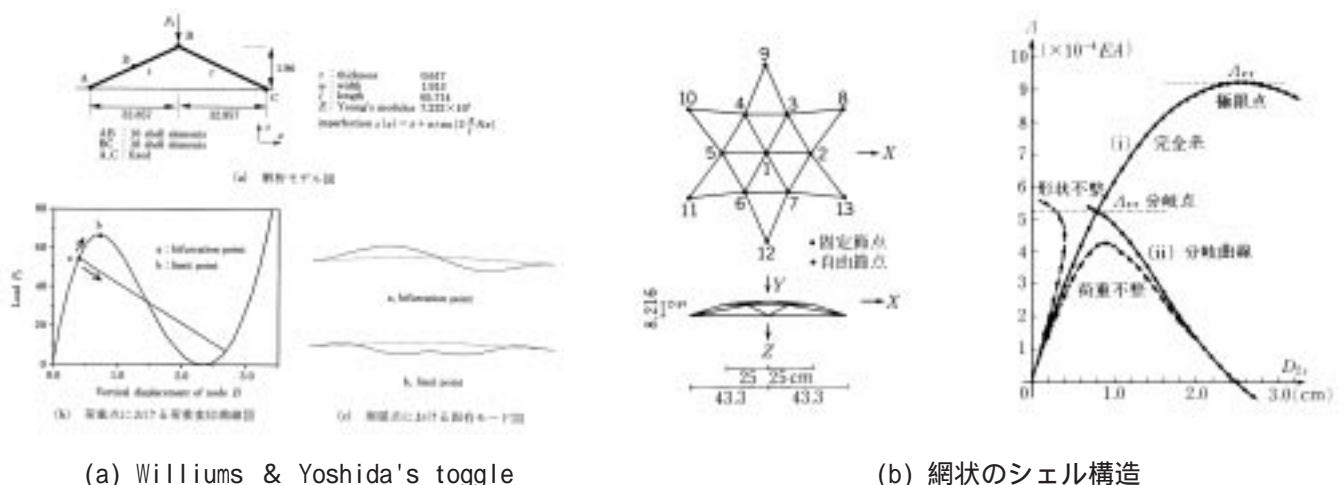


Fig.4 分岐点と極限点の共存

このような問題において分岐点を逃さないようにするには、初期不整を与えるのが現状では最も現実的です。この操作によって、分岐点は極限点に変わります。すなわち分岐解析を飛び移り解析として扱うことになるので、安定な評価が可能となります⁽³⁾。反面、Fig.4(b)から明らかなように、臨界荷重値は下がるので、注意が必要です。より精密に分岐径路を求める手法としては、scaled corrector法⁽⁴⁾といった新しい手法が提案されており、今後の発展が待望されます。今回は次の解析例1で、初期不整を用いて分岐点を識別した例を示します。

【3】解析例1 円弧アーチの外圧座屈

分岐点と極限点の共存の例として、Fig.5に示すような両端を固定された円弧アーチの外圧座屈を扱ってみます。この問題は、ティモシェンコの著作⁽⁶⁾に綿密な解が与えられており、Fig.5の破線に示すような非対称的分岐モードが得られることが知られています。

座屈荷重を求めるには、まず変形した形状を示す微分方程式を仮定します。この方程式を、アーチの弧長がのびないという不伸長の条件の下で解くと、最小根が座屈荷重に相当します。FEMに適用する上では、Fig.6に示す従動荷重の効果、すなわち「変形後」の形状の法線方向に外圧の荷重ベクトルを想定してこの理論解が求められていることを、理解しておくことが必要です⁽⁷⁾。FEMでは単に外力ベクトルを更新するだけでなく、荷重補正マトリックスを考慮して剛性を修正しないと、正しい座屈固有値は求まりません^{(1),(8)}。

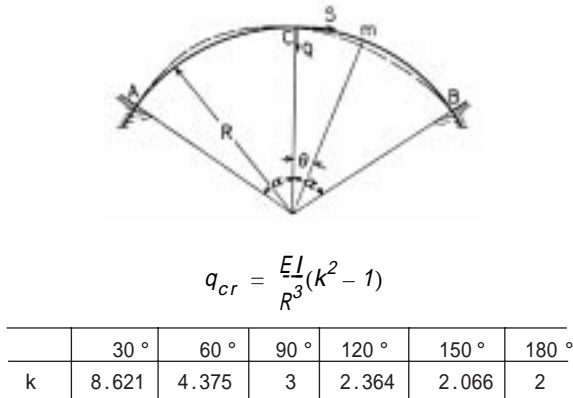


Fig.5 円弧アーチの外圧座屈

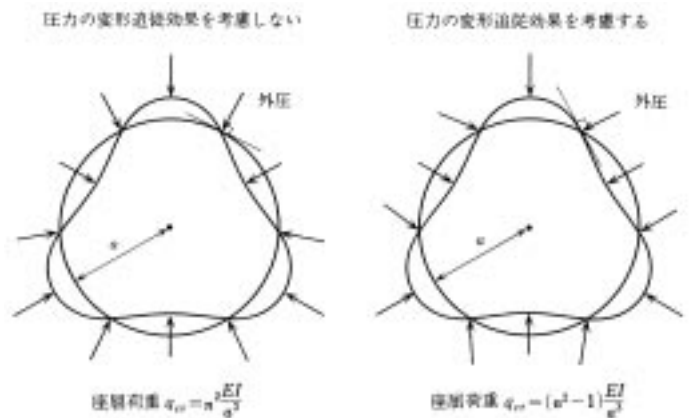


Fig.6 従動荷重の効果（円管の場合）

この問題を以下の条件で解析します。モデル化には厚肉シェル要素を適用しました。荷重補正マトリックスの考慮によって理論解に一致する結果が得られることを確認しました。

E=1 kg/mm² = 0
 R=100mm = 30°
 アーチの断面は1 × 1mmの矩形とし、
 I=bh³/12=0.0833mm⁴

Table2 座屈固有値 q_{cr} [10⁻⁶ kg/mm²]

| 開き角 | 理論解 | FEM (荷重補正マトリックス) | |
|-----|------|------------------|-------|
| | | 考慮する | 考慮しない |
| 30° | 6.11 | 6.19 | 6.32 |

次に同じ問題に弧長法による荷重増分解析を適用しました。上に示した座屈固有値は非対称分岐点に相当するものであり、初期不整がない理想的な条件では、アーチは対称に変形する極限点まで耐えるはずですが、これを以下の3つの条件で解析しました。

- Case1 : 初期不整を与えず、極限点を見出す。
- Case2 : 固有モードと相似なごく僅かな初期不整を与え、分岐させる。
(初期不整を sin 形状とし、真円との差がアーチ肉厚の 1 × 10⁻³)
- Case3 : より大きな初期不整を与える。(同じく 1 × 10⁰)

Fig.7に、得られた変形の履歴を示します。Case1では対称に、Case2では非対称から対称に変形形状が推移することがわかります。Fig.8は荷重-変位曲線です。Case2の座屈点は、Table2に求めた分岐点の固有値にほぼ一致します。またCase3では座屈点が大幅に低下します。解析的にはCase1,Case2はきわめて不安定であり、MARCのAuto-Increment機能を用いて約2000ステップの解析となっています。不用意に解析すると、数値誤差が不整となってさまざまな系路が出現し、これらの間を規則性なく行き来するような結果となりました。なお、この種の問題については半谷先生の著作⁽⁹⁾に理論解が示されていますので、あわせて参照下さい。

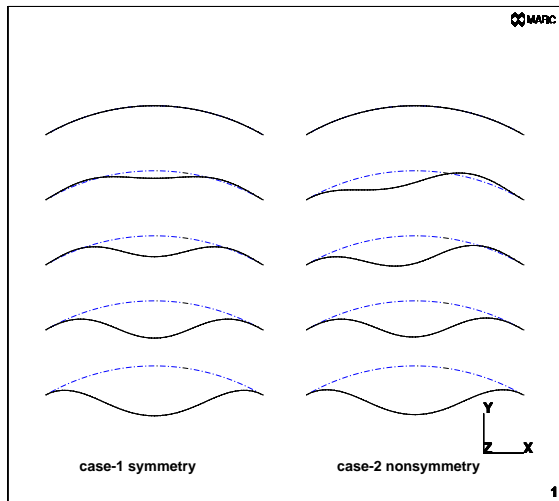


Fig. 7 変形の履歴

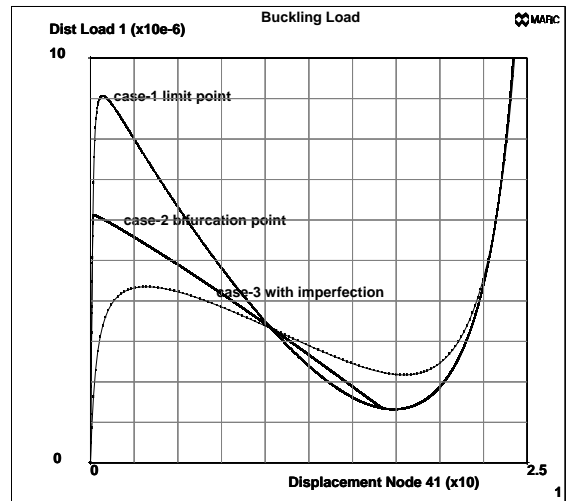


Fig. 8 荷重 - 変位曲線

【4】解析例2 薄肉円筒のねじり座屈

Donnell^{(6),(10)}の系統的な研究によれば、円筒シェルの部材力のつり合い式を、らせん上の節線をもつ変形モードを想定して解くと、以下のようなねじりによるせん断応力の臨界値 τ_{cr} と発生する変形モードの円周方向の波数 n が求められます。

$$\text{固定縁: } (1-\nu^2) \frac{\tau_{cr} l^2}{E h^2} = 4.6 + \sqrt{7.8 + 1.67 \left(\sqrt{1-\nu^2} \frac{l^2}{2ha} \right)^2} \quad n = 2.62J^{-1/4}$$

$$\text{ヒンジ縁: } (1-\nu^2) \frac{\tau_{cr} l^2}{E h^2} = 2.8 + \sqrt{2.6 + 1.40 \left(\sqrt{1-\nu^2} \frac{l^2}{2ha} \right)^2} \quad n = 2.31J^{-1/4}$$

$$\text{但し、} \quad J = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{l^3 t}{d^3}$$

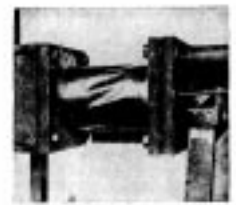
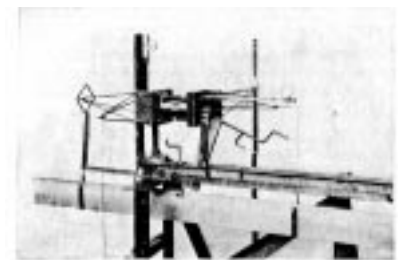


Fig. 9 Donnell の実験

Fig. 10は横軸に無次元化された円筒の形状、縦軸に座屈荷重の関係を示します。実測値は理論解に比較して若干下側に分布することが知られています。Fig. 11は固定縁の条件で解析した結果を示します。座屈荷重、波数ともに理論解と一致する結果が得られました。

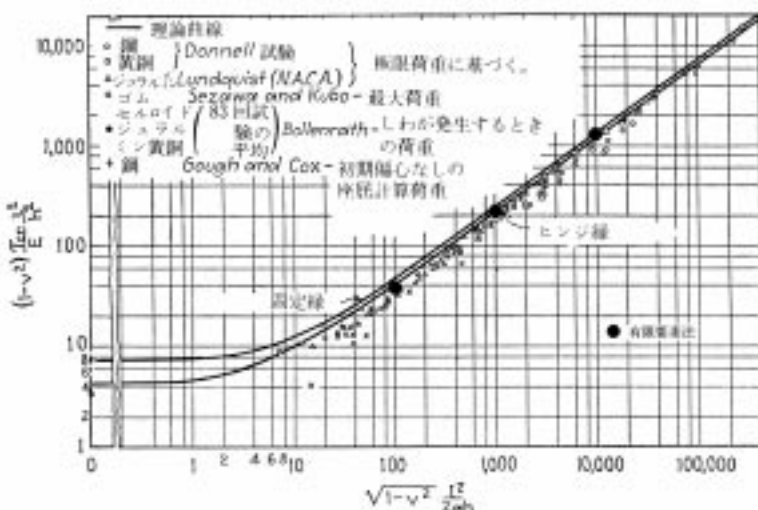


Fig. 10 座屈荷重

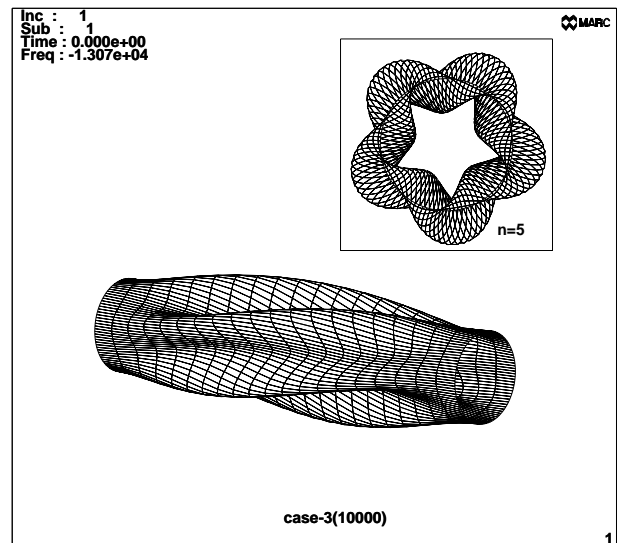


Fig. 11 解析結果

【 5 】 解析例 3 外圧を受ける部分球殻のクリープ座屈

Fig. 12は周辺単純支持の浅い部分球殻に一樣な外圧を与えてクリープを進行させ、限界時間を越えた時点で座屈を生じさせる問題です。6/6ナイロンを用いた実験⁽¹¹⁾と解析の先行例^{(1),(12)}があり、形状などの条件に対して極めて鋭敏であることが知られています。ここでは、以下の条件に対して解析しました。Fig. 13, Fig. 14 に結果を示します。定性的な傾向を良く再現する結果となりました。

形状と荷重 $R = 356\text{mm} (14.0\text{in})$, $349\text{mm} (13.75\text{in})$, $343\text{mm} (13.5\text{in})$
 $= 11.7^\circ$, 11.9° , 12.1°
 $r = 72\text{mm}$ $h = 3.2\text{mm}$ $p_0 = 0.017\text{kg/mm}^2$

材料構成則 $E=310\text{kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $\dot{\epsilon}_c = 4.139 \times 10^{-4} \dot{\epsilon} \cdot t^{0.36}$ ($\dot{\epsilon}$:kg/mm², t:hr)

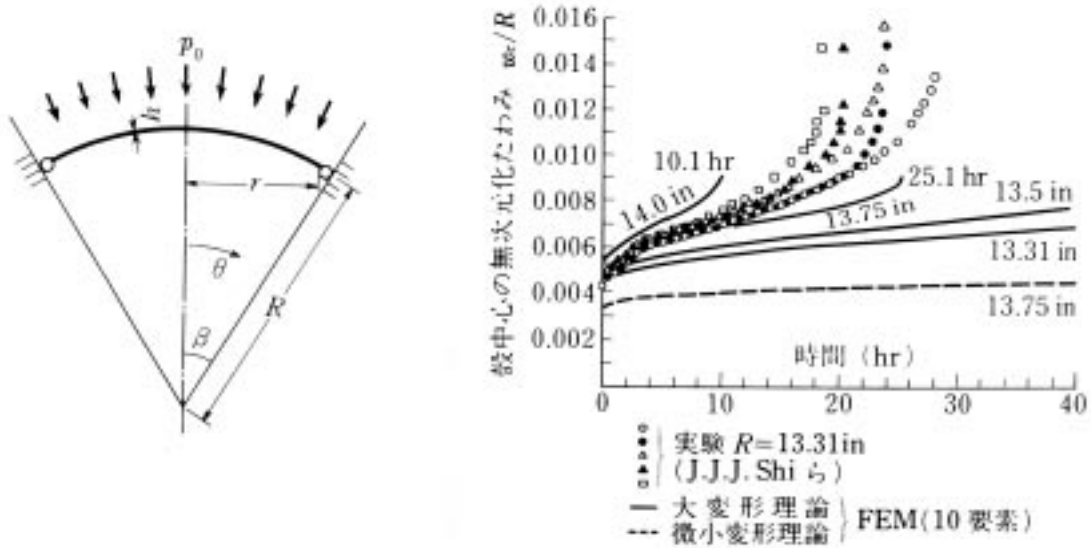


Fig.12 実測値および先行解析例

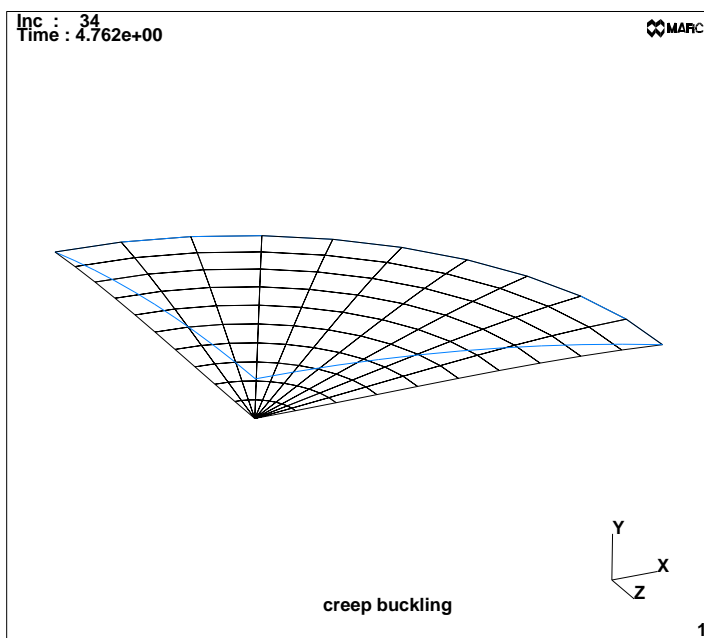


Fig.13 解析モデル

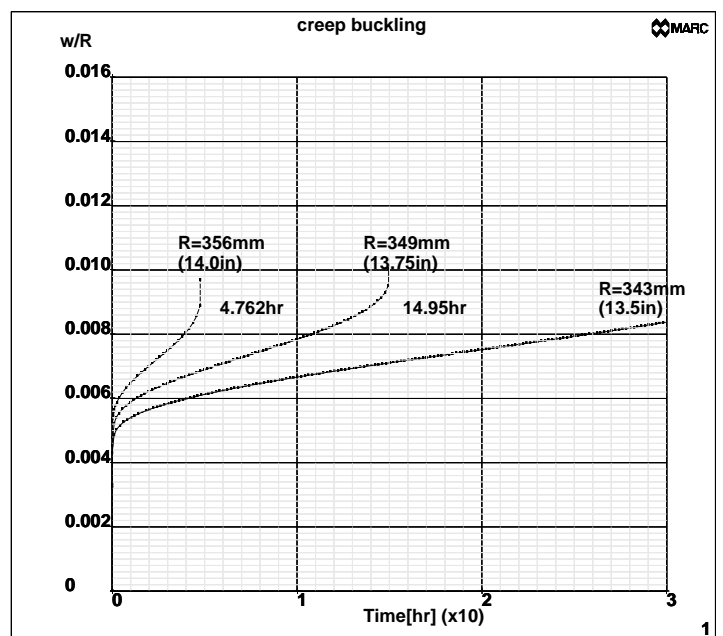


Fig.14 解析結果

【6】解析例4 繰返し荷重による弾塑性座屈

耐震性向上の観点から、極限領域での繰返し荷重に対する評価技術が重要になってきています。Fig.15, Fig.16はボックス鋼で作られたラーメン構造の隅角部を取り出し、引張と圧縮を交差的に加えて、曲げによる弾塑性座屈を解析した結果です。建材の一般的な試験法にならい、荷重の振幅をサイクル毎に次第に増加させる入力方法をとりました。

材料の構成則は単純な条件を想定しましたが、この種の繰返し解析では、微小ひずみの非弾性解析における場合と同様に移動硬化則を採用することが重要です。国内では、既に実用的な水準でこの種の解析が行われるようになってきています⁽¹³⁾が、亀裂損傷や、ボルト継手部分での滑りなど、細部での精度と合理性の追求が待たれる分野です。

解析条件 $E=20000\text{kg/mm}^2$ $\nu=0.3$ $S_y=20\text{kg/mm}^2$ $H'=200\text{kg/mm}^2$ (移動硬化)
ボックス鋼はおよそ $1000 \times 1000 \times 20\text{t}$ の矩形断面

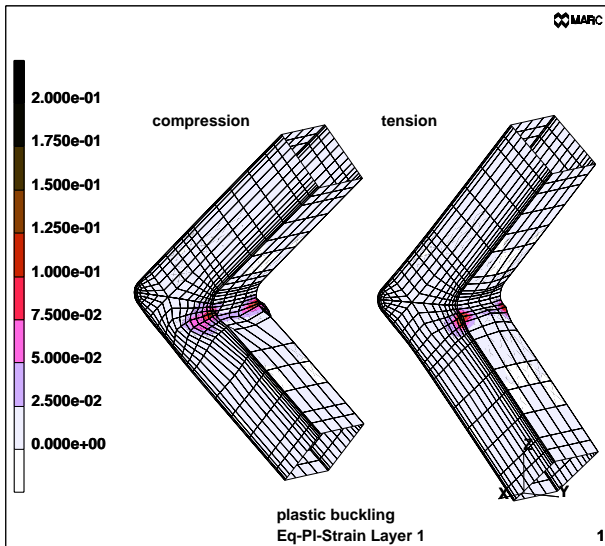


Fig.15 鋼製ラーメンの隅角部

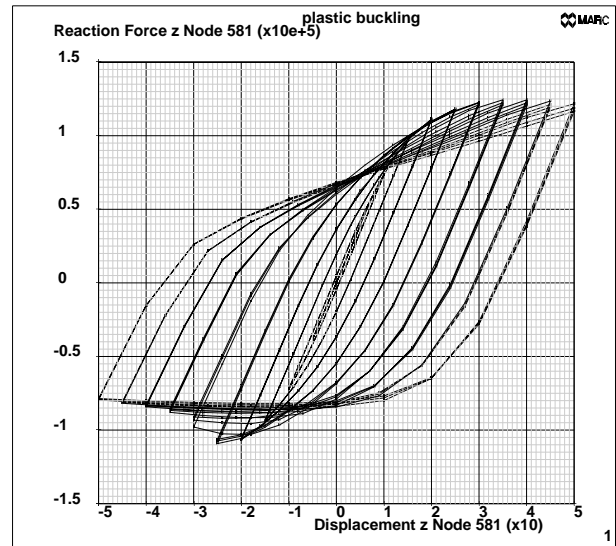


Fig.16 荷重 - 変位 解析結果

参考文献

- (1) 山田他, 有限要素法ハンドブック, II 応用編, 培風館, 1983.
- (2) 川井, 藤谷, 座屈問題解析, 培風館, 1991.
- (3) 久田, 野口, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- (4) 野口, 久田, Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集, A58-555, p.2191, 1992.
- (5) 吉田, 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, 374, P.25, 1986.
- (6) ティモシェンコ他, 弾性安定の理論(上・下), プレイン図書出版, 1974.
- (7) 大坪他, 相関問題, 培風館, 1991.
- (8) 例えば Iwata, Tsukimori and Kubo, A Symmetric Load-Stiffness Matrix for Buckling Analysis of Shell Structures under Pressure Loads, Int. J. Pres. & Piping, 45, p101, 1991.
- (9) 半谷, 川口, 形態解析, 培風館, 1991.
- (10) L.H.Donnell, Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion, NACA Report, 479, 1933.
- (11) J.J.Shi et al., Application of the Variational Theorem for Creep of Shallow Spherical Shells, AIAA J., 8, p.469, 1970.
- (12) 矢川, 宮崎, 有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析, サイエンス社, 1985.
- (13) 例えば, 鋼製橋脚の弾塑性有限変位 FEM 解析マニュアル, (社) 日本橋梁建設協会, 1998.

表紙: Edmund Nagele

*MARC/MENTAT は株式会社日本エムエスシー殿の製品です。

株式会社メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス

〒182-0024 東京都調布市布田1-40-2 アクシス調布2階

TEL 0424-82-1539

FAX 0424-82-5106

www.mech-da.co.jp

comm@mech-da.co.jp