

vol.99-3

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.
October 1999



ドイツ 10月

【特集】LS-DYNAによる粘弾性解析

FEM Consulting Services for Engineering Practice
URL <http://www.mech-da.co.jp>

LSDYNA による粘弾性解析

Application of Viscoelastic Analysis by LS-DYNA

三原康子
Yasuko Mihara

渡辺洋一
Yoichi Watanabe

小林卓哉
Takaya Kobayashi

【1】はじめに

経時的にひずみが増加するクリープの現象は、レオロジーあるいは粘弾性と呼ばれる挙動で説明づけられます。ちなみにクリープ(Creep)とは英語で忍び足で歩く、レオロジーとはギリシャ語(rheo)で流れるを意味します。ビニールひもが時間と共に緩むような現象は日常でも見られますが、機械設計の分野で粘弾性が正面から取り上げられるようになったのは、それほど昔のことではありません。

レオロジーの基礎をなすのはフックの弾性法則とニュートンの粘性則です。20世紀初頭の米国では、製造年代の古いボイラーの爆発事故が続発しました。40年間で1万件を超える事故が発生したと言われています。その大半は、高温高圧下でクリープによる損傷が忍び足で進んだ結果です。ニュートンの粘性則によれば、応力はひずみ速度に正比例します。その比例係数が粘度です。応力が高いか、あるいは粘度が低ければ、ひずみは、急速に進行します。しかしクリープが発生するとはいえ、通常の金属材料で問題となる時間のオーダーは年単位です。米国のボイラーの事故に対しては、円筒胴の肉厚を上げ、内圧による応力を下げる、という単純な対策が劇的な効果を上げました。材料のクリープを正面から扱うことが常に合理的とは限りません。

しかし、高分子材料に代表されるような新素材の分野では、秒あるいは分の単位で著しい変形を生ずるものが少なくありません。粘弾性による議論を避けることは難しくなっています。特に耐衝撃性の向上など、LSDYNAが適用対象とする分野でも、むしろ粘弾性の効果を積極的に利用して設計の高度化を図ることが求められるようになってきました。今回は理論解のある例題を対象として、LSDYNAの基本的な用法を検証した結果を紹介します。

【2】粘弾性モデル

2.1 MaxwellモデルとVoigtモデル

粘弾性のモデル化には、MaxwellおよびVoigtのモデルを使用するのが一般的です。Fig.1に3要素からなるモデルを示します。いずれも2個のバネと1個のダッシュポットからなりますが、その並び方が違います。ここでダッシュポットとは自動車のショックアブソーバーを思い浮かべて頂くのが良いでしょう。急激な変形には強い抵抗を示しますが、緩やかな変形を許す特性を持ちます。すなわち粘性を表わす要素です。

まずMaxwellモデルに瞬間的に伸びを与え、それを一定に保持する条件を考えます。瞬間的にはダッシュポットは剛で変形を生じないので、2本のバネ E_0 と E_1 が並列(E_0+E_1)で荷重を発生させます。しかし、時間の経過と共にダッシュポットが伸び、ばね E_1 の荷重は時間 $t=$ で0まで低下します。このダッシュポットの時間的特性を示すのが粘性係数 η_1 (あるいは緩和時間 T_{r1})です。 T_{r1} はいわゆる一次遅れ系の時定数であり、今回の例では E_1 で発生していた荷重が $1/e$ に低下するまでの時間を表します。この緩和の過程を式で表すと以下ようになります。ここでは変位が一定なのでこのバネ定数の変化の式は荷重の変化を表わすこととなります。

$$E(t) = E_0 + E_1 \exp(-t/T_{r1}) \quad \dots\dots(1-1)$$

一方、Voigtモデルには一定の荷重を加えて保持する条件を考えます。バネは、バネ定数の逆数すなわちコンプライアンス C_g および C_i で表します。荷重が一定なので、コンプライアンスは変位を表すこととなります。先程と同様、 $t=0$ ではダッシュポットは剛であるので、変位はバネ C_g においてのみ発生します。時間の経過とともにダッシュポットは伸び、 C_i が C_g と同じ荷重を発生する変位になるまで伸び続けます。すなわち $t=$ ではダッシュポットが受け持つ荷重は0になります。このようなクリープ型の変位応答は以下のように表されます。

$$C(t) = C_g + C_i[1 - \exp(-t/T_i)] \quad \dots\dots(1-2)$$

(1-1)式及び(1-2)式はモデル化こそ異なるものの、等価となるように定数を選べば同じ材料を表現することができます。今回のような3要素モデルの場合、等価となる定数間の関係は以下のようになります⁽¹⁾。

$$E_e = T_{ri} \cdot (T_i C_g) \quad \dots\dots(1-3)$$

$$E_i = 1 \cdot C_g - E_e \quad \dots\dots(1-4)$$

$$T_{ri} = T_i \cdot (1 + C_i \cdot C_g) \quad \dots\dots(1-5)$$

例えば、LSDYNAの*MAT_KELVINMAXWELL_VISCOELASTIC オプションでは、このような3要素モデルを対象としてMaxwell、Voigtいずれの方法でも材料定数を入力することができます。

2.2 多軸場への拡張

粘弾性モデルをEMに適用するためには、上記のような概念を多軸場に展開する必要があります。このとき材料が等方性であるとしても、せん断変形と体積変形のそれぞれについて材料定数を定めなければなりません。体積成分に関する試験が困難を伴い、また一般的にはせん断成分の方がより支配的であることを踏まえ、ここではFig.2のようにせん断成分についてのみ粘弾性を考慮したモデルを考えます。この材料の緩和関数 $G(t)$ と $K(t)$ は

$$G(t) = G_e + G_i \exp(-t/T_i), \quad K(t) = K_e \quad \dots\dots(2-1)$$

粘弾性問題はステップ状の入力に対する刺激応答の問題であり、ラプラス変換を用いると以下の関係があることが知られています⁽¹⁾。

$$\frac{1}{G(s)} + \frac{1}{3K(s)} = \frac{3}{E(s)} \quad \dots\dots(2-2)$$

ここで、(2-1)式より

$$G(s) = \frac{G_e}{s} + \frac{G_i}{s + 1/T_i}, \quad K(s) = \frac{K_e}{s} \quad \dots\dots(2-3)$$

(2-3)式を(2-2)式に代入して単軸応答を求めます。

$$E(s) = \frac{9K_e(G_e + G_i)}{3K_e + G_e + G_i} \frac{s + c}{s(s + a)} \quad \dots\dots(2-4)$$

但し、

$$a = \frac{3K_e + G_e}{(3K_e + G_e + G_i)T_i}, \quad c = \frac{G_e}{(G_e + G_i)T_i}$$

(2-4)式を逆変換すると単軸の緩和弾性率が求まります。

$$E(t) = \frac{9K_e(G_e + G_i)}{3K_e + G_e + G_i} \left[\frac{c}{a} + \left(1 - \frac{c}{a}\right) \exp(-at) \right] \quad \dots\dots(2-5)$$

この結果を数値的に検討してみましょう。数値例として、Fig.2に示すモデルの定数を次のように与えます。

$$G_e = 10, \quad G_i = 40, \quad K_e = 50, \quad T_i = 1.8 \quad \dots\dots(2-6)$$

(2-5)式を(1-1)式の形式になるように書き改めると、Fig.1(a)に示したMaxwellの単軸モデルは以下のように表記されます。

$$E(t) = E_e + E_i \exp(-t/T_{ri})$$

$$= \frac{225}{8} \left[1 + 3 \exp\left(-\frac{32}{5}t\right) \right] \quad \dots\dots(2-7)$$

$$E_e = \frac{225}{8} \quad E_i = \frac{3 \times 225}{8} \quad T_{ri} = \frac{5}{32}$$

この問題をLSDYNAを用いて解析します。Fig.3に1mm×1mm×1mmのソリッド要素のモデルを示します。このモデルに(2-6)式に示した材料定数を*MAT_VISCOELASTIC(タイプ6)で入力しました。LSDYNAの応力とひずみは、真値ベースで処理されています。これに対して通常の線形粘弾性理論は微小ひずみを前提としています。そこで、このモデルでは変位が過大にならないよう、上面にZ=0.01mm(ε_z=1%)を与え、応力緩和を解析しました。初期変位は*BOUNDARY_PRESCRIBED_MOTION_SETで与えました。得られた応力緩和曲線をFig.4に示します。理論解と一致する結果が得られました。

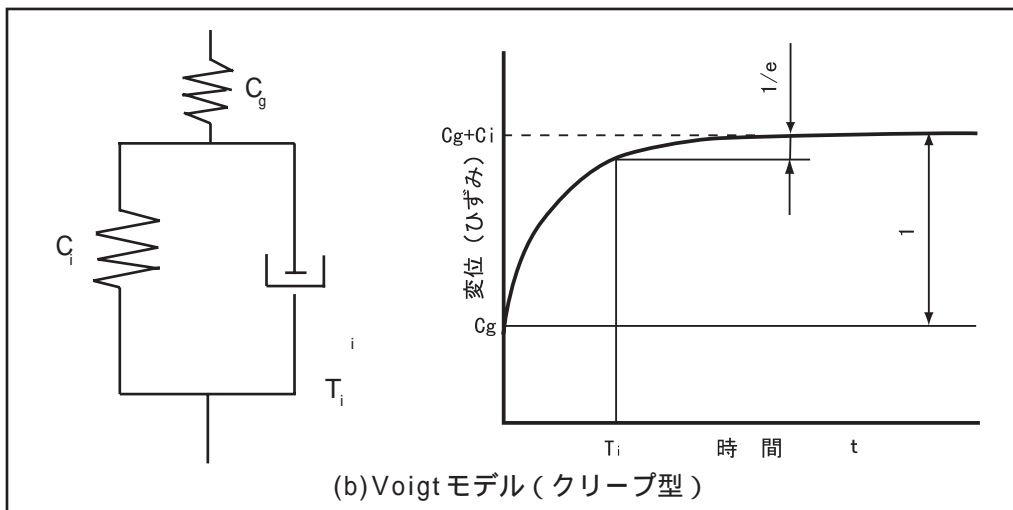
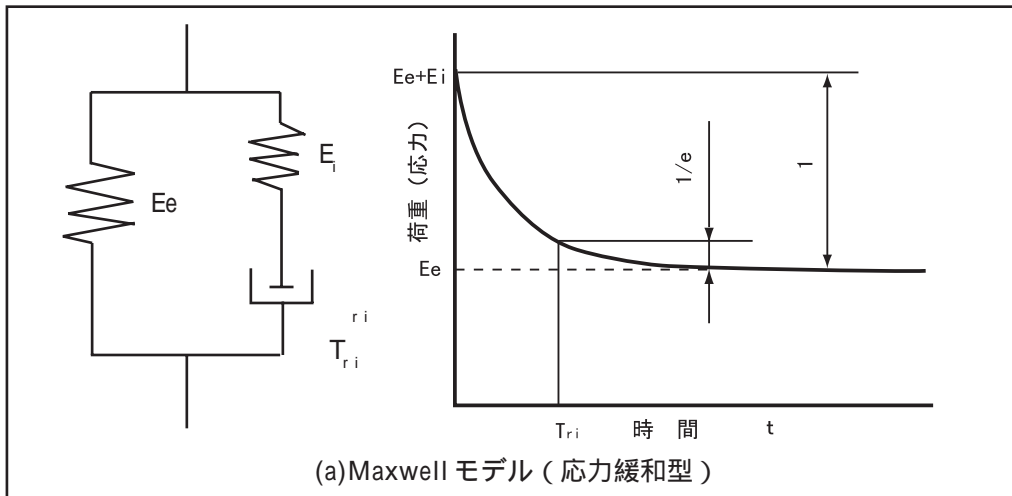


Fig.1 粘弾性モデルの比較

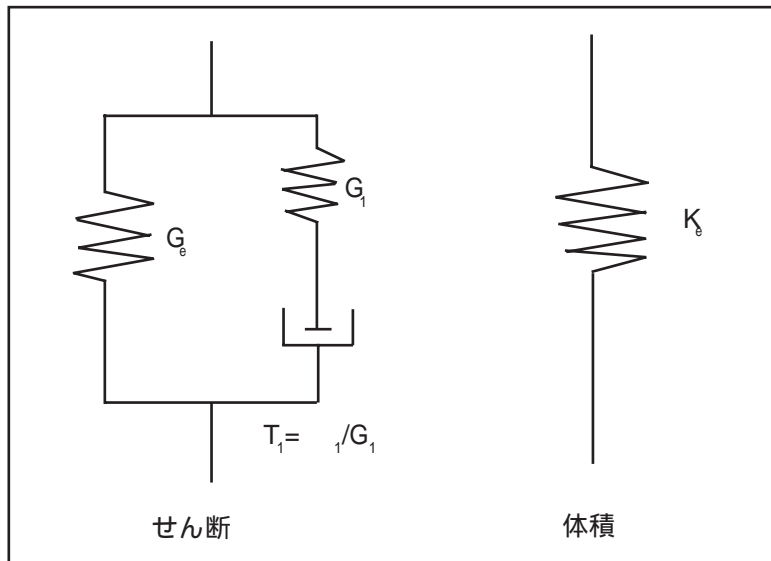


Fig.2 せん断および体積成分による表示 (Maxwell モデル)

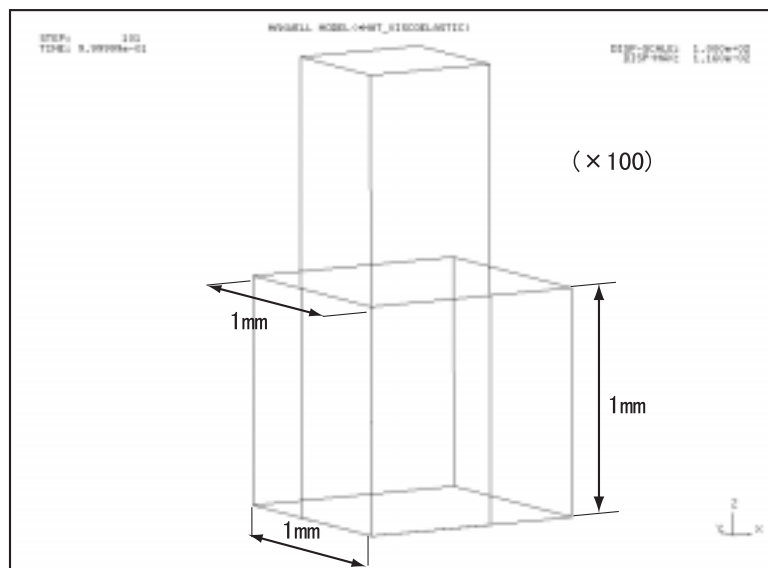


Fig.3 ソリッド要素試験片モデル

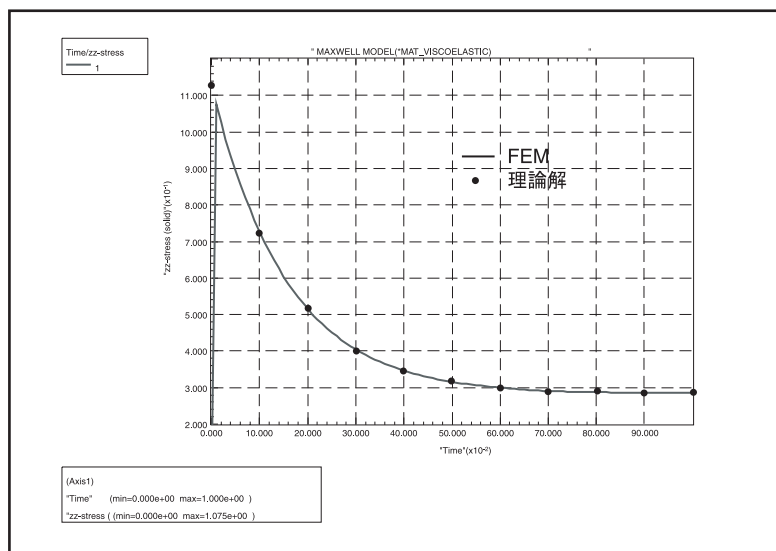


Fig.4 応力緩和曲線 ((2-7)式による)

【3】一般化 Maxwell モデルと材料定数の同定

今まで説明してきたモデルは、時間定数を1つしか持たない単純な緩和特性を持っています。しかし現実の材料がこのようなモデルで表現できることは多くなく、0から無限大までの幅広い時間領域に対応する緩和特性の集合として1つの材料を考えるのが自然です。力学的なモデルで示すと、Fig.5に示すような一般化Maxwellモデルがその代表的な例です。このモデルに変位を与えると、ダッシュポットは瞬間的には剛に振舞うので、全てのバネの総和に相当する荷重が発生します。(3-1)式において $t=0$ を代入した場合に相当します。ダッシュポット $T_1 \sim T_n$ は緩和時間が長い順に配列されており、時間と共にこれらが弛緩すると、対応するバネ $G_1 \sim G_n$ が順次荷重を失います。Fig.5に示すように、最終的には線形バネ G_e のみが残存します。

$$G(t) = G_e + \sum_{i=1}^n G_i \exp(-t/T_i) \quad \dots\dots (3-1)$$

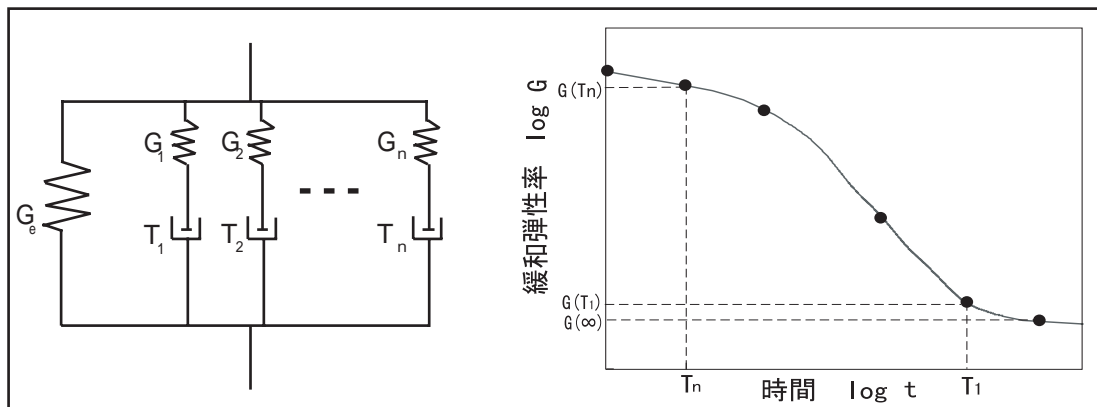


Fig.5 一般化 Maxwell モデル

次に(3-1)式の係数を実際に決定する方法を考えましょう。いま、Fig.6に示すような応力緩和のデータが与えられているものとします。実際には各種の応力緩和試験や、周波数応答試験からの変換によってデータが与えられます⁽²⁾。これらのデータから材料定数を定めるために、緩和挙動が指数関数的に減衰する性質を利用した、プロニー級数によるコロケーション法が提案されています⁽³⁾⁽⁴⁾。この手法では指数関数の(3-2)式のような性質を利用します。

$$\exp(-t/T_i) \cong 0 \quad (t \gg T_i) \quad \dots\dots (3-2)$$

まず、(3-1)式において $t=$ を考えます。このときダッシュポットは全て緩和しており、応力緩和関数は(3-3)式となります。

$$G(\infty) = G_e \quad \dots\dots (3-3)$$

次に、 t の値として一番大きい緩和時間 T_1 を考えます。

$$G(T_1) = G_e + G_1 \exp(-T_1/T_1) + G_2 \exp(-T_1/T_2) + \dots\dots + G_n \exp(-T_1/T_n) \quad \dots\dots (3-4)$$

このとき(3-2)式より、(3-4)式の第3項以降は0となるので、 G_1 は次のように決定できます。

$$G_1 = \{G(T_1) - G_e\} \exp(1) \quad \dots\dots (3-5)$$

同様に大きい緩和時間から順次、せん断弾性係数が決定できます。決定した定数をLS-DYNAの* MAT_GENERAL_VISCOELASTIC (タイプ76)で与えて、先のFig.3に示したモデルを用いて緩和応答を解析しました。Fig.6に示すように、十分な近似精度で一般化Maxwellモデルを適用することができました。

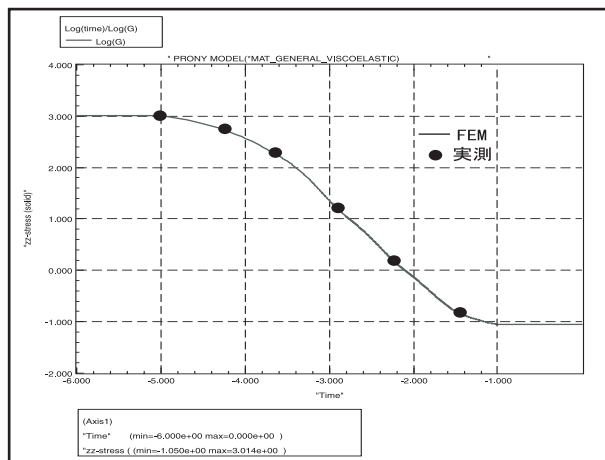


Fig.6 コロケーション法による応力緩和曲線の同定

【4】粘弾性材料の周波数応答

LSDYNA で粘弾性材料を扱う場合、ここまで示したような静解析を行うことは実際には困難を伴います。陽解法のプログラムであるので時間ステップを柔軟に扱うことが難しいからです。例えば、一般化Maxwellモデルは通常はオーダーの異なる時間定数をもったダッシュポットの組合せです。従って、最も短いものにあわせて時間ステップを定めると解析時間は膨大になります。また陰解法と異なり、初期の機械荷重や熱荷重を与えておき、その後、時間を進めて粘弾性応答を見るといった便宜的な操作も簡単にできる訳ではありません。従って、LSDYNA を適用する主眼は、動的な問題に対する粘弾性の効果を見る点にあると考えるのが妥当です。ここでは最も初歩的な例として、正弦波入力に対する周波数応答を検証した結果を紹介しましょう。

応力緩和挙動を示す材料に正弦的なひずみが加わったとき、その応力の応答は周波数依存性を持ちます。ここでは計算例として、先のFig.1(a)および(2-7)式で定めた3要素のMaxwellモデルを考えます。このモデルに振幅A=1の正弦的に変化するひずみが入力されるものとします。緩和がなければ、(4-1)式に示す弾性応力が発生します。

$$\sigma = (E_e + E_i)\varepsilon = 112.5 \quad \dots\dots(4-1)$$

しかし、ダッシュポットを含むために、粘弾性を考慮した応答は周波数依存性を持ち、以下のような複素表示で与えられることが知られています⁽¹⁾。

$$\text{実部 } E' = E_e + E_i \frac{\omega^2 T_{ri}^2}{1 + \omega^2 T_{ri}^2} \quad \dots\dots(4-2)$$

$$\text{虚部 } E'' = E_i \frac{\omega T_{ri}}{1 + \omega^2 T_{ri}^2}$$

$$\text{応力の応答振幅 } \sigma = (E'^2 + E''^2)^{0.5} \quad \dots\dots(4-3)$$

$$\text{位相差 } \delta = \tan^{-1}(E''/E')$$

E'は貯蔵弾性率、E''は損失弾性率と呼ばれます。このうちE''がダッシュポットの効果を色濃く表します。Fig.7、Fig.8は(4-2)式と(4-3)式を今回の条件について図示したものです。単軸の緩和時間は(2-7)式より $T_{ri}=5/32$ です。その逆数を周波数とすると6.4Hzに相当します。Fig.8を見ると、この周波数以下の領域で応力の応答振幅は小さくなり、またひずみと応力に位相差が生ずることがわかります。今回は、位相差が最大となる周波数として0.5Hzを選び、検討してみます。このとき得られるべき応力振幅、位相差は以下の通りです。

$$\sigma = 55.6 \quad \dots\dots(4-4)$$

$$\delta = 36.9[\text{deg}]$$

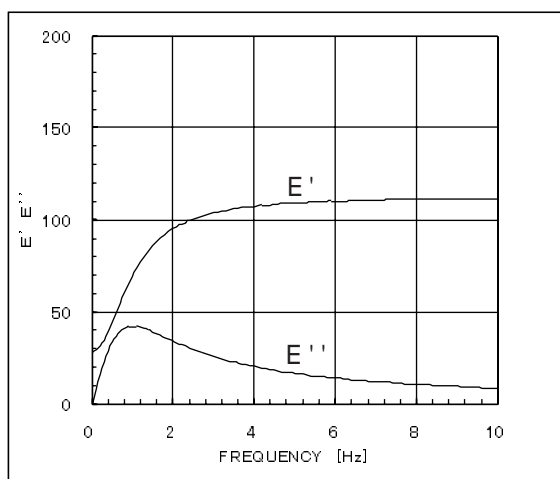


Fig.7 貯蔵弾性率 E' と損失弾性率 E''

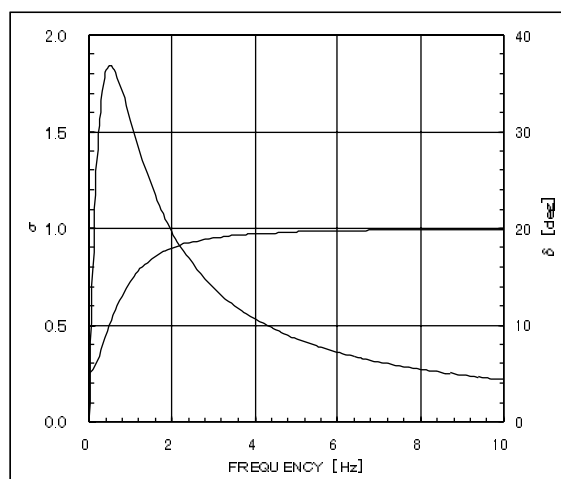


Fig.8 応力振幅 と位相差

これを LSDYNA を用いて解析します。まず、*MAT_KELVINMAXWELL_VISCOELASTIC (タイプ 61) を使用して(2-6)式に示したせん断と体積の材料モデルを入力しました。モデルの形状はFig.3に同じです。また、微小ひずみ問題とするため、ひずみ振幅 $A=0.01(1\%)$ となるように *BOUNDARY_PRESCRIBED_MOTION_SET で正弦的に変化する変位を入力し、周波数特性を検討しました。

Fig.9は、ひずみと応力の時刻歴を示します。この図から読み取れる振幅と位相差が(4-4)式に相当し、妥当な結果が得られていることがわかります。但し、ひずみ振幅は0.01としているので、応力の応答も(4-4)式の1/100となっている点に注意して下さい。

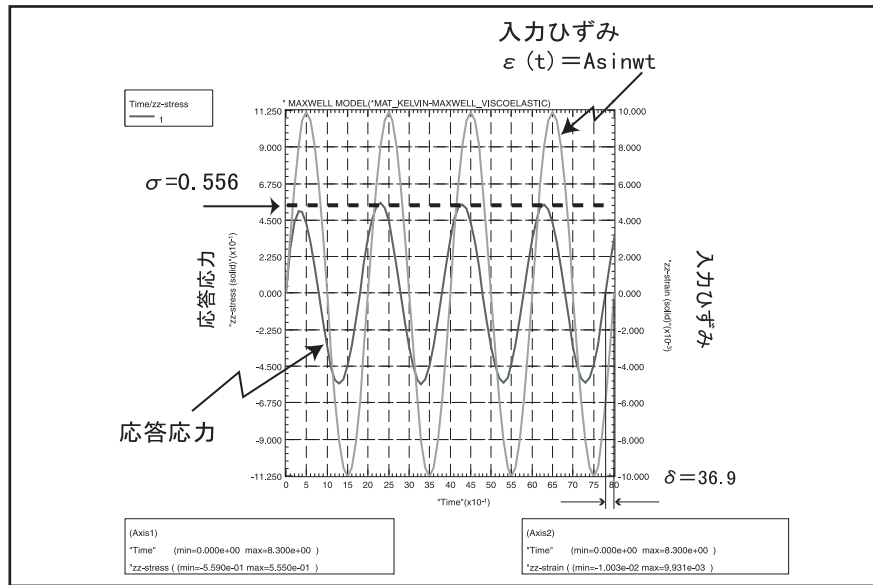


Fig. 9 Maxwell モデルの周波数応答

【5】衝撃応答の解析

最後に衝撃応答の解析例を示します。これはFig.11に示すように、一次元の棒が剛体壁に衝突する問題です。衝突発生後、棒の先端から後端に向かって弾性波が伝播し、後端で反射して再び先端に戻ります。この間が棒の剛体壁に付着している時間（反跳までに要する時間）になります。ダッシュポットの効果を鮮明に表すために、Fig.10に示すようにせん断成分を単純Maxwellとしたモデルを考えます。単純 Maxwell モデルでは、ダッシュポットが伸びきると剛性は0になります。すなわち、この問題では棒が壁に付着したままの状態となります。材料定数は以下のように仮定しました。 T_1 を変えて2ケースの解析を行います。

$$G_1 = 50, \quad K_e = 50, \quad \rho = 1 \times 10^{-10} \quad \dots\dots(5-1)$$

$$T_1 = 10^{-4} (\text{Case1}), \quad T_1 = 10^{-5} (\text{Case2})$$

このモデルの瞬間弾性率は以下ようになります。

$$E = \frac{9KG}{3K + G} = \frac{9K_e G_1}{3K_e + G_1} = 112.5 \quad \dots\dots(5-2)$$

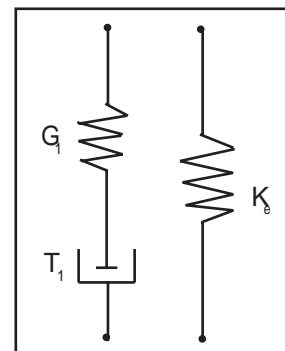


Fig.10 衝撃応答解析の材料モデル

また棒内の音速は以下のようになります。

$$c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{112.5/1 \times 10^{-10}} = 1.06 \times 10^6 [\text{mm/sec}] \quad \dots\dots(5-3)$$

棒の長さをL=100mmとすると、棒の反跳時間 t_r は棒の内部を弾性波が音速で往復する時間に相当するので

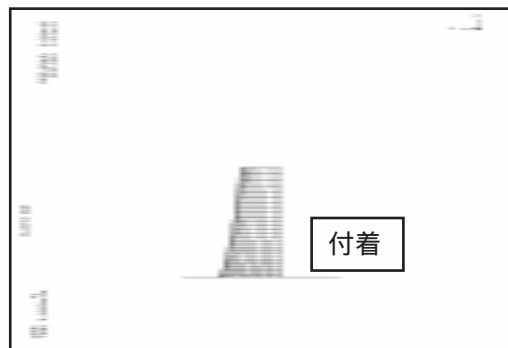
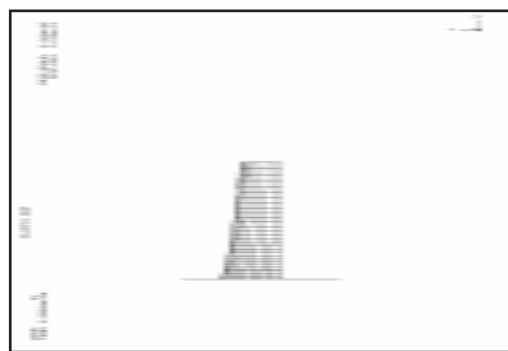
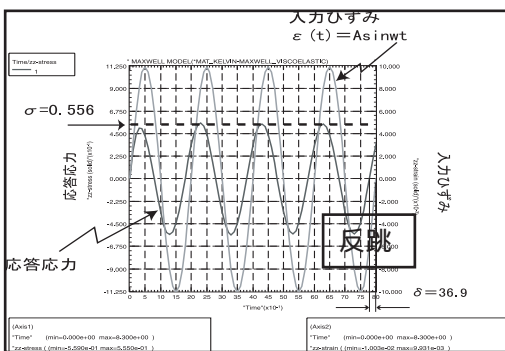
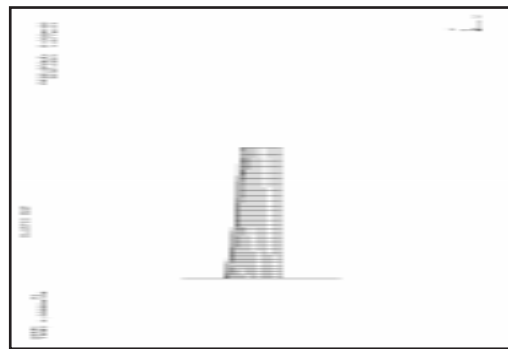
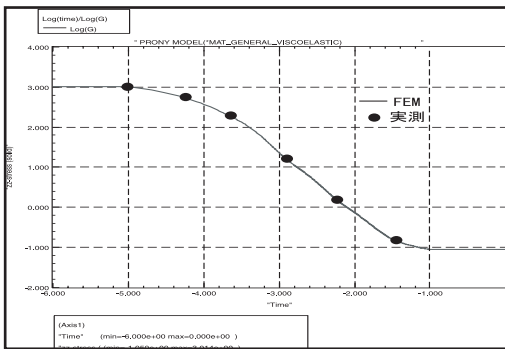
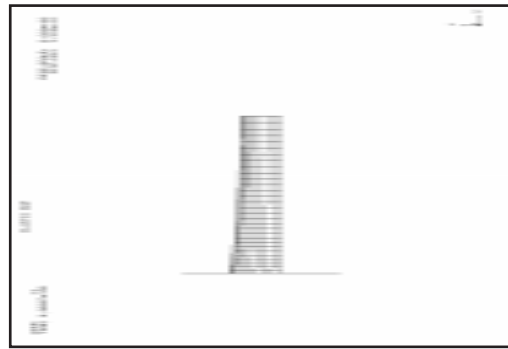
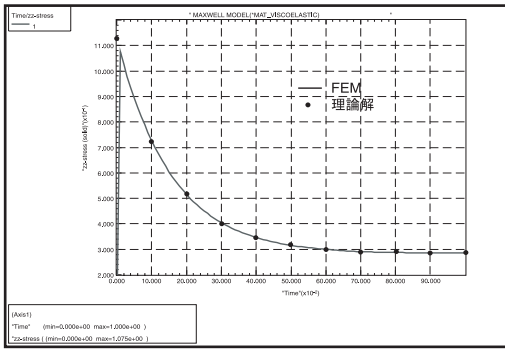
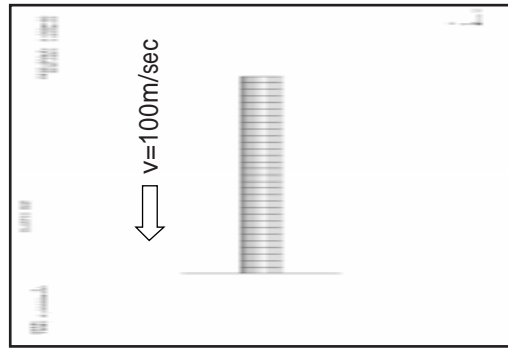
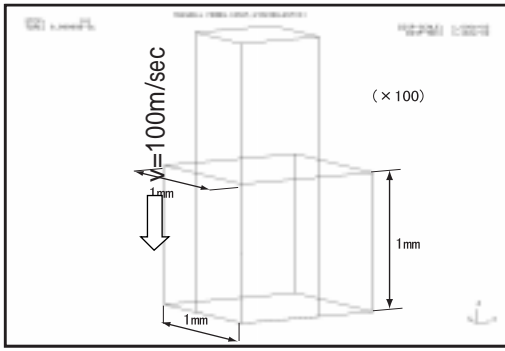
$$t_r = 2L/c = 200/1.06 \times 10^6 = 1.89 \times 10^{-4} [\text{sec}] \quad \dots\dots(5-4)$$

粘弾性体内の応力波の伝播問題では(5-3)式に示す音速は不変であることが知られています⁽¹⁾。すなわち、音速は瞬間弾性率と密度から定まり、ダッシュポットの影響は受けない点に注意して下さい。Fig.11に、緩和時間 T_1 を変えた2ケースの結果を示します。(5-4)式に与えられている反跳時間 t_r に対して、Case1は $T_1 \approx t_r$ とした場合です。粘弾性の効果があっても、 $t = t_r$ で反跳を生じていることが分かります。またCase2は $T_1 < t_r$ とした場合です。反跳する前にダッシュポットが効き、弾性が失われてしまうので、棒は壁に付着したまま反跳できない結果となります。

参考文献

- (1) 山田, 塑性・粘弾性, 培風館, 1994. (p.11, p.181, p.185, p.237)
- (2) Nielsen, L.E., 小野木訳, 高分子と複合材料の力学的性質, 化学同人, 1995. (例えばp.98)
- (3) 隆, 国尾, 粘弾性挙動と特性係数, 材料システム, 第6巻, p.21, 金沢工業大学材料システム研究所, 1987.
- (4) Schapery, R.A., Proc. 4th U.S. National Congress on Applied Mechanics, 2, p.1075, 1962.

*LS-DYNAの国内総代理店は株式会社日本総合研究所殿です。



Case1 緩和時間 ≈ 反跳時間

Case2 緩和時間 < 反跳時間

Fig.11 粘弾性棒の衝突解析