

Mech D & A News



コール独首相 AP/WWP

【特集】陰解法と陽解法による動的応答解析

- ・ 1自由度系の落下衝撃
- ・ 非線形振子の固有振動
- ・ 弾性・弾塑性体の衝撃

Mechanical Design & Analysis Co.

November 1998

FEM Consulting Services for Engineering Practice
URL <http://www.mech-da.co.jp>

【特集】 陰解法と陽解法による動的応答解析

かねてお知らせの通り、弊社では MARC^{*1} による受託解析業務に加え、LS-DYNA^{*2} の販売を開始致しました。今後、これら陰・陽両解法の比較検証を通して、複合的な CAE 技術の確立を図ってゆく所存です。今回は、質点系の振動および連続体内の波動伝播の問題について検討した結果を紹介します。

【1】 1 自由度系の落下衝撃

多自由度系の問題に入る前に、質量・バネ・ダッシュポットからなる 1 自由度質点系の解析を手がけてみます。ここでは既刊のニュースレター vol.96-4^{*3} で取り上げたものと同じ解析を例にとります。

Fig.1-1 に示す減衰をもつ 1 自由度振動系が、高さ h から落とされ、 $t=0$ でバネの先端が着地したとします。臨界減衰比を ζ_{st} とし、これをパラメータとして加速度の変化を図示すると、Fig.1-2 のようになります。図から判るように、 ζ_{st} が 0.5 よりも大きいときには、最大加速度は $t=0$ 、すなわち着地の瞬間に生じます。また ζ_{st} が 0.5 よりも小さいときには、最大値は着地後に発生します。また、最大加速度の値をなるべく小さくするためには $\zeta_{st} = 0.25$ 付近の値を採用すれば良いことがわかります。自動車のサスペンションのダンパーの減衰比はこの程度にとられることが多いようです。

$w=30\text{kg}$ の重量を持つ質点に $k=3\text{N/mm}(0.3061\text{kg/mm})$ のバネを付けて、 $h=1000\text{mm}$ の高さから落下させる条件を考えます。各種のパラメータは以下の値となります。個々の定義については既刊のニュースレター^{*3} を参照下さい。

$$V_0 = \sqrt{2gh} = 4427\text{mm/sec} \quad f_n = v/2 = 1.592\text{rad/sec} \quad v = \sqrt{k/m} = 10\text{rad/sec} \quad \sqrt{2h/\zeta_{st}} \cdot g^{-1} = 2.259 \times 10^{-5}$$

$$\zeta_{st} = mg/k = 98\text{mm} \quad T = 1/f_n = 0.6283\text{sec} \quad c = \zeta c_c = 2\zeta\sqrt{mk} = 0.06122\zeta$$

質点（節点）に集中質量を持たせ、重力の下で初期速度を与えて解析しました。地面との間にはバネを設け反跳を表現できるようにしました。ダッシュポットの c の値を調整し、 $\zeta_{st} = 0, 0.25, 1.0$ の 3 ケースについて解析した結果を Fig.1-3 に示します。理論解にあるように、 $\zeta_{st} = 0.25$ の加速度が最も小さく、履歴の挙動は Fig. 1-2 に一致します。

なお、 $t=0$ での質量 m の位置を絶対変位 x の原点にとると、接地してからの運動方程式は (1) 式ようになります。また、初期条件は (2) 式のように与えています。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg \quad \dots\dots(1)$$

$$x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = \sqrt{2gh} \quad \dots\dots(2)$$

MARC では (1) 式、(2) 式を用いて初期加速度は (3) 式のように計算されます。

一方 LS-DYNA では、1 ステップ目においても減衰を考慮した動的釣合い式を作っていますが、速度を更新する前に結果ファイル (d3plot, nodout) を書き出すため、1 ステップ目の結果には減衰を考慮しない (4) 式のような値が出力される点に注意して下さい。

Fig. 1-3(b) の始点位置が、パラメータによらず同一なのはこの理由によります。

$$\ddot{x}_0 = \frac{mg - c\dot{x}_0}{m} \quad \dots\dots(3)$$

$$\ddot{x}_0 = g \quad \dots\dots(4)$$

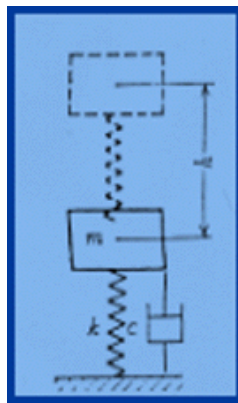


Fig.1-1 1 自由度振動系の落下

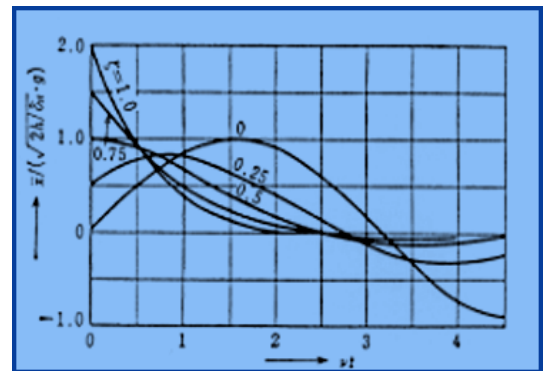
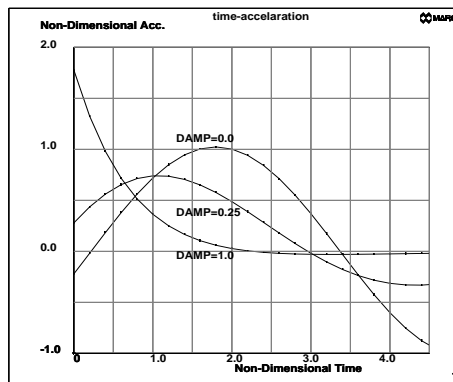
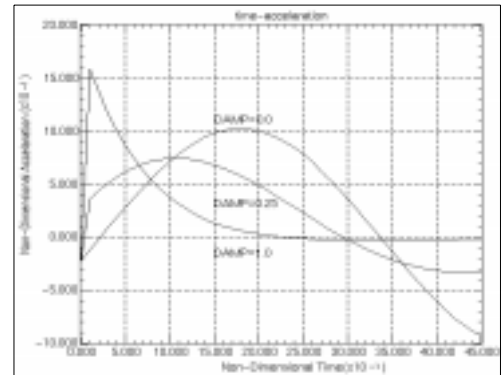


Fig.1-2 着地後の加速度の履歴 (理論解)



(a) MARC



(b) LS-DYN)

Fig.1-3 着地後の加速度の履歴 (FEM)

【 2 】 非線形振子の固有振動

幾何学的非線形性として分類される大変形問題の特徴は、回転変位が大きくなることによって、角度に関する 1 次近似 ($\sin \phi \approx \phi$) が成り立たなくなる点にあります。ここではその最も代表的な例として、大振幅の振子を取り上げて検討します。

一般に Fig. 2-1 のような単振子の運動方程式は (1) 式で表せます。

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\phi \quad \dots\dots(1)$$

振子の振動が小さい時には、 $\sin \phi \approx \phi$ の近似が成立するので (1) 式は (2) 式のように表せます。

$$\frac{d\phi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\phi \quad \dots\dots(2)$$

(2) 式は通常の単振動と同じ形の運動方程式となり、その周期 T は (3) 式で求められます。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots\dots(3)$$

一方、 $\sin \phi$ を展開すると (4) 式の様になります。

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 \dots\dots = \left(1 - \frac{1}{3!}\phi^2 + \frac{1}{5!}\phi^4 \dots\dots\right) \quad \dots\dots(4)$$

角振幅が大きくなると、(4) 式の第 2 項以下の影響が大きくなり、復元力が変位に比例しない非線形系の振動となります。このような非線形系の単振子の周期 T は Table2-1 に示すように (5) 式で求められます。

$$T = 4K(k) \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots\dots(5)$$

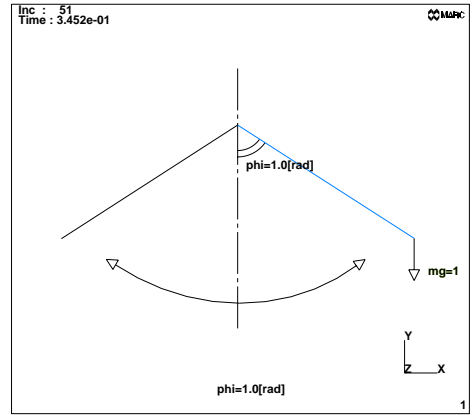


Fig.2-1 単振子

復元力特性 $\rho(x)$	固有周期 T	備考
$c x ^{n-1}x, \quad c>0, \quad n \geq 2$	$4\sqrt{\frac{m}{cA^{n-1}}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^{\psi(n)} \frac{d\psi}{\sqrt{1-u^{2n+1}}} = 4\sqrt{\frac{m}{cA^{n-1}}} \psi(n)$	$\psi(n)$ の値は下表に示す
$c(x+\beta x^3), \quad c>0, \quad \beta>0$	$4K(k) \sqrt{\frac{m}{c(1+\beta A^2)}} \cdot k^2 = \frac{\beta A^2}{2(1+\beta A^2)}$	共に $ \beta A^2$ が小さいときには近似的に
$c(x+\beta x^3), \quad c>0, \quad \beta<0$	$4K(k) \sqrt{\frac{m}{c(1+\beta A^2 \beta)}} \cdot k^2 = \frac{ \beta A^2}{2+\beta A^2}$ $ \beta A^2 < 1$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c(1+\beta A^2 \beta)}}$
$\frac{mg}{l} \sin x$	$4K(k) \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{A}{2}, \quad A < \pi$	A は長さ l の単振り子の振り角

いま、単振子の腕の長さ $l=100\text{mm}$ 、先端の重量 $W=mg=1\text{kg}$ の条件を考えます。このモデルにおいて、線形振動として導かれた (3) 式により周期 T を求めると、角振幅 A の値によらず、以下の値となります。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.635[\text{sec}] \quad \dots\dots(6)$$

次に A が十分小さい場合として $A=0.1$ ($k^2=0.01$) 大きな場合として $A=1$ とし、非線形振動として導かれた (5) 式により周期 T を求めると、以下の値となります。 $A=0.1$ の場合は、(6) 式の線形解にほぼ一致し、また $A=1$ の場合は周期が長くなるのがわかります。

$A=0.1$ の場合

$$k^2 = \sin^2 A = 2.5 \times 10^{-3}$$

$$K(k) = 1.57178$$

$$T = 4 \times 1.57178 \times \sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.635[\text{sec}]$$

$A=1$ の場合

$$k^2 = \sin^2 A = 0.2299$$

$$K(k) = 1.67502$$

$$T = 4 \times 1.67502 \times \sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.677[\text{sec}] \quad \dots\dots(7)$$

次に振子の腕をビーム要素でモデル化し、先端の節点に質量を与え、FEM 解析を行ないました。振幅によらず常に鉛直下方向に重力が加わるような条件下で解析を進めると、Fig.2-2 のような応答が得られます。この図は質点の水平方向の変位を示しており、固有周期として 0.677sec が得られています。結果をまとめて Table2-2 に示します。MARC、LS-DYNA 共に良好な結果が得られました。

		理論解	MARC	LS-DYNA
微小振幅 (線形)		0.635	-	-
有限振幅 (非線形)	=0.1	0.635	0.635	0.635
	=1.0	0.677	0.677	0.677

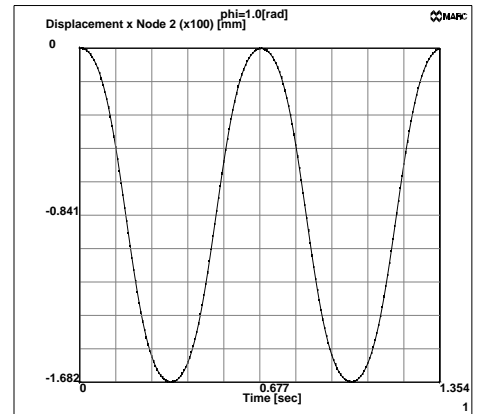


Fig. 2-2 固有応答振幅 (=1.0)

【 3 】 連続体内部の波動の伝播

衝撃解析のポイントは、ある箇所が生じた応力が波動となって、構造材の内部を伝播する挙動を適切に表現することにあります。ここでは手始めに 1 次元の縦波の伝播から説明します*5。

まず Fig.3-1 のように、断面積 S 、縦弾性係数 E の一様な棒の軸方向を x 軸にとります。棒の任意の断面 S_1 でのひずみが du/dx 、微小距離 dx だけ隔たった断面 S_2 でのひずみが $du/dx + (d^2u/dx^2)dx$ であるとき、これら両方の断面上にはそれぞれのひずみに対応した応力が生じています。この他、体積力 X が作用していればそれを含めて、 dx の区間の微小要素に作用する力の和をとると、

$$SE \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} dx \right) - SE \frac{du}{dx} + X \quad \dots \dots (1)$$

この和が 0 であれば作用力は平衡状態にあり、この要素は静止しています。また 0 でなければ力の勝る方向へ移動します。この移動は慣性力でまかなわれるので、移動の加速度を $\partial^2u/\partial t^2$ 、ひずみのない状態での棒の密度を ρ とすれば、次式が成立します。

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - SE \frac{\partial u}{\partial x} + X \quad \dots \dots (2)$$

体積力を無視して (3) 式のようにおくと、(4) 式が得られます。

$$c_b = \sqrt{E/\rho} \quad \dots \dots (3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots \dots (4)$$

(4) 式は 1 次元の波動方程式であり、これは (5) 式のような一般解をもつことが知られています。いま、(5) 式の右辺の変数に一定値 Q_0 を (6) 式のように与えて、両辺を t で微分すると、(7) 式が求まります。

$$u = f_1(x+c_b t) + f_2(x-c_b t) \quad \dots \dots (5) \quad Q_0 = x \pm c_b t \quad \dots \dots (6) \quad dx/dt = \pm c_b \quad \dots \dots (7)$$

すなわち、 c_b は Q_0 で指定される一定の変位状態 $u_0=f(Q_0)$ が移動する速度、つまり波の速度を表します。符号はそれぞれ x の正または負の方向の波の速度を意味します。従って波動方程式 (4) の解 u は、一般に x の正方向と負方向に進行する波の重ね合せとして与えられることとなります。

ここに述べた c_b は、棒内を一次的に伝播する縦波 (longitudinal wave) の速度です。これは変形状態から見れば、伸縮波 (extensional wave) に相当します。しかし、同じ縦波であっても、無限体内を伝播する波に対して三次元的に導かれた速度 c_L とは異なるので、棒波 (bar wave) の速度と呼んで区別します。両者の間には次の関係があります。

$$c_L = c_b \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad \dots \dots (8)$$

一般の金属材料のように、 $\nu=1/3$ の場合には $c_L=1.2c_b$ となり、同じ縦波であっても棒内を伝播する縦波のほうが速度は遅くなります。これは、無限体の場合には x 方向の変位が周囲からの拘束を受けるのに対して、細い棒を伝播する縦波は横方向の変形を伴って不均一な応力分布になるためです。一般に、波長が棒径の 3 倍程度を超える波によって応答が支配される衝撃であれば、一次元波動の取扱いで近似できると言われています。(8) 式で表される 3 次元の縦波の伝播速度の例を、Table3-1 にまとめておきます

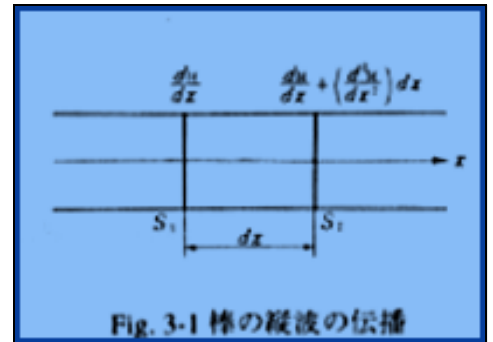


Table 3-1 3次元の弾性縦波の伝播速度^{*5}(水以外は常温)

材 料	c_L [m/sec]	材 料	c_L [m/sec]
鉄	5124	大理石	3810
ニッケル	4973	ガラス	5000~6000
鉛	1320	ゴム	30~70
氷 (269k)	3232	木	1000~4700

一方、応力が弾性限界を超えると塑性波が生じます。弾性波の速度が $c_b = \sqrt{E/\rho}$ であることから類推して、縦弾性係数 E の代わりに Fig. 3-2(a) の塑性域では $d\sigma/d\varepsilon$ と一般化して書けば、塑性波の速度は次のようになります。

$$c_p = \sqrt{\frac{d\sigma/d\varepsilon}{\rho}} \dots\dots (9)$$

塑性域に入ると $(d\sigma/d\varepsilon) < E$ となるので、塑性波の速度は弾性波の速度よりも遅く、ひずみが増すに従って速度は遅くなります。しかし同図 (b) のような応力 - ひずみ関係を示す材料では、あとに生じた波のほうが速く伝播するため、塑性波頭に追いついて急激な応力の立上がりを持つ波、すなわち衝撃波 (shock wave) が伝播することになります。

この (b) のような初期降伏応力がオーバーシュートする曲線は、樹脂材料を低温下で変形させたような場合に見られがちな特性です。このような衝撃波の影響によって破断箇所は衝撃力の作用端に近づき、極端な場合には衝撃力の作用端において破壊を生ずると言われています。

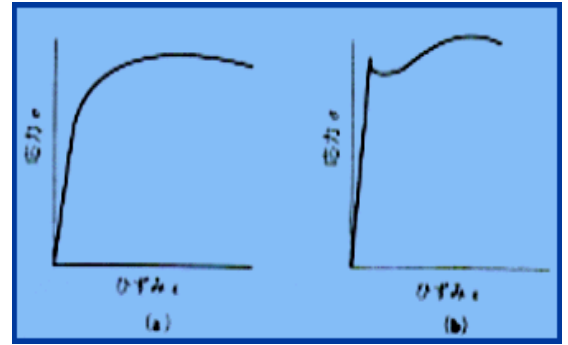


Fig. 3-2 弾塑性の応力 - ひずみ線図

【 4 】 弾性棒の衝撃解析

前項に示した 1次元の波動の伝播を、実際に解析してみます。以下のような諸元を持った中実の丸棒が、初速度 v で剛な壁に衝突する問題です。

長さ	$L=100\text{mm}$	半径	$r=10\text{mm}$	初速度	$v=50 \times 10^3\text{mm/sec}$
縦弾性係数	$E=20000\text{kg/mm}^2$	ポアソン比	$= 0$	密度	$=8.01 \times 10^{-10}\text{kgsec}^2/\text{mm}^4$
縦波伝播速度	$c_b = \sqrt{E/\rho} = 5000 \times 10^3\text{mm/sec}$		反跳時間	$t_2=2L/c_b=4.00 \times 10^{-5}\text{sec}$	

Fig. 4-1 は MARC の軸対称要素を用いて解析した結果です。 $t=0$ で棒の左端で生じた応力は、速度 c_b で右方向に伝播します。棒の寸法が次第に縮むことがこれに対応します。 $t_1=L/c_b=2.0 \times 10^{-5}\text{sec}$ で応力波は右端に達し、反射して、棒は逆の方向に変位するようになります。最終的に $t_2=2L/c_b=4.0 \times 10^{-5}\text{sec}$ で棒の形状は復元し、反跳してゆきます。

Fig. 4-2 に棒の左端と右端の節点の変位の履歴を示します。また、Table 4-1 に、MARC と LS-DYNA の解析の要目をまとめて示します。理論解と一致する結果が得られました。

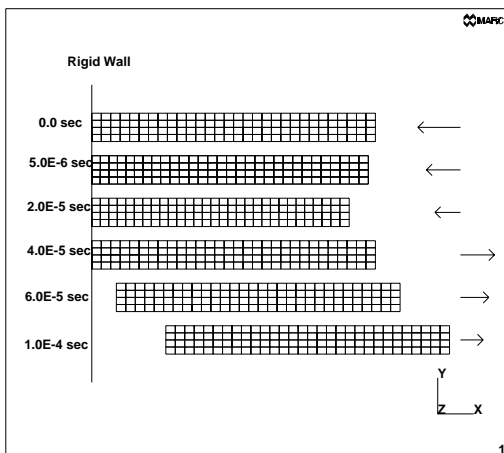


Fig. 4-1 弾性棒の衝撃

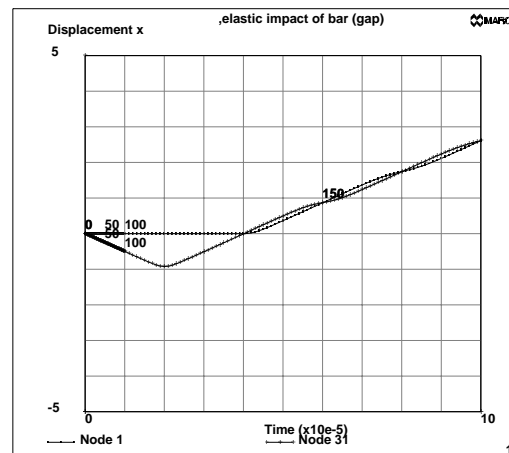


Fig. 4-2 棒の両端の変位履歴

項目	理論解	MARC	LS-DYNA
解析モデル	1次元波動論	軸対称要素	3次元ソリッド要素
接触面のモデル化	-	Gap要素	自動 contact (constraint surface to surface)
反跳時間 t_2 [sec]	4.0×10^{-5}	4.0×10^{-5}	4.0×10^{-5}

【5】弾塑性体の衝撃解析

最後に弾塑性体の衝撃の例を示します。かなり古い研究ですが、Fig. 5-1 に示すような弾丸を剛な壁に撃ち込む問題であり、実測結果と特性曲線法による解が公表されています^{*6,*7}。弾丸は以下のような諸元をもつステンレス製の円柱材料です。真応力と対数ひずみの関係として、単純な弾完全塑性材料が仮定されています。

長さ $L=0.5in=12.7mm$ 半径 $r=0.17in=4.318mm$ 初速度 $v=916ft/sec=279 \times 10^3mm/sec$
 縦弾性係数 $E=12830kg/mm^2$ ポアソン比 $=0.3$ 密度 $=8.0 \times 10^{-10}kgsec^2/mm^4$
 降伏応力 $Sy=181kg/mm^2$

Fig.5-2 に MARC と LS-DYNA で得られた最終形状と相当塑性ひずみの分布、Fig. 5-3 に円柱の後端の変位の履歴を示します。両者は良い一致を示し、また、形状も実測値を概ね再現しています。計算に関する諸元を Table5-1 にまとめて示します。

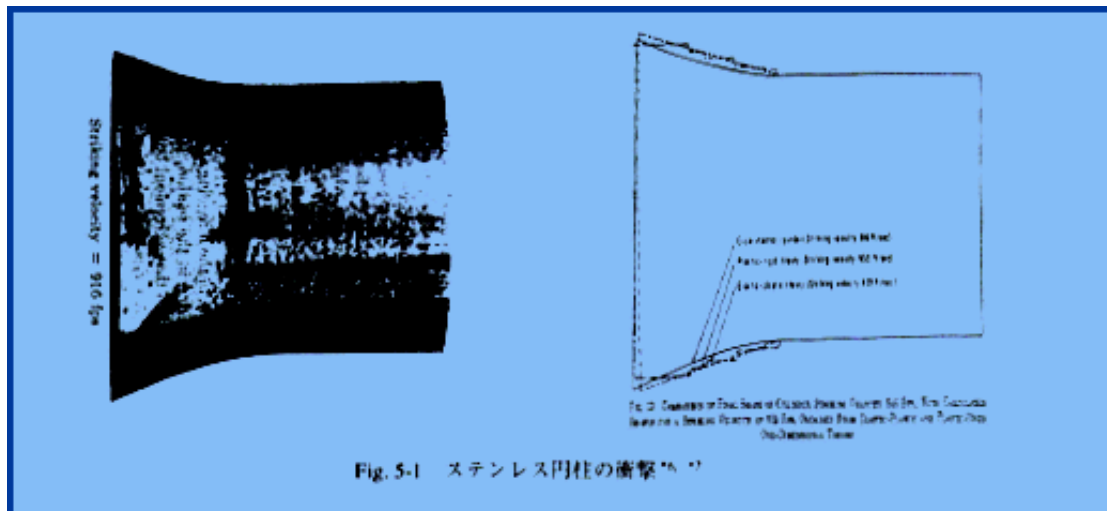
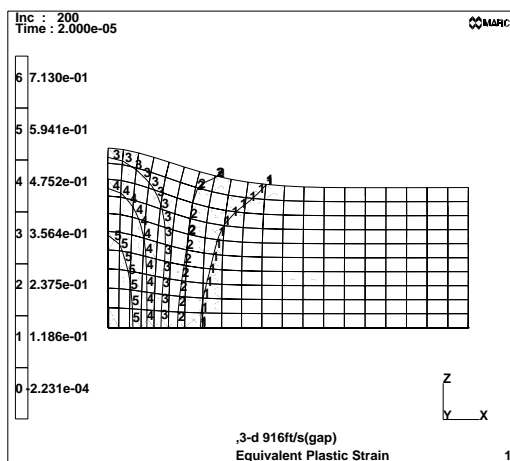
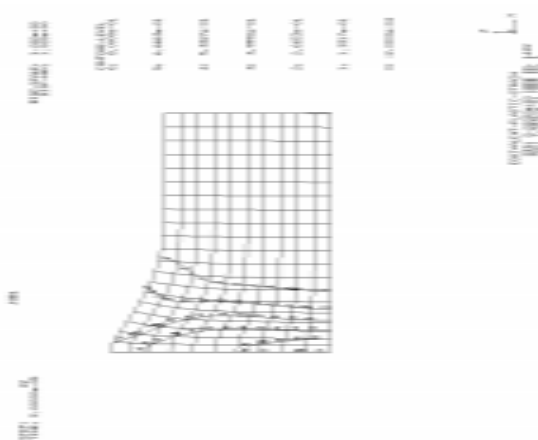


Fig. 5-1 ステンレス円柱の衝撃実験

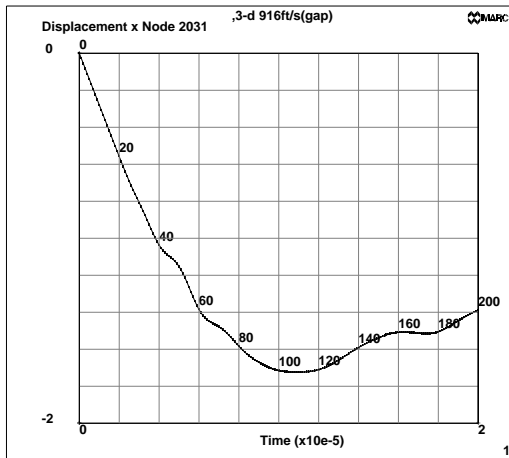


(a) MARC

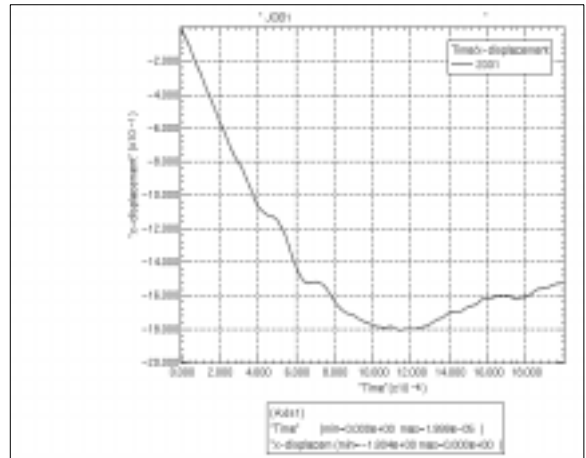


(b) LS-DYNA

Fig. 5-2 最終形状



(a) MARC



(b) LS-DYNA

Fig. 5-3 円柱後端の変位履歴

項目	MARC	LS-DYNA
解析モデル	3次元ソリッド要素 (要素数: 1800)	同左
接触のモデル化	Gap 要素	自動 contact (constraint surface to surface)
CPU 時間 (HP C160)	ニューマーク 法(注) 約 7400sec	中央差分法(注) 約 800sec

(注) 形状や接触の条件が単純であるので、解法による差がCPU時間にそのまま現れています。プログラムの性能を比較する数値ではないことを十分にご了解下さい。

参考文献等

- *1 MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。
- *2 LS-DYNA の国内総代理店は株式会社日本総合研究所殿です。
- *3 衝撃応答の解析, Mech D & A News, Vol. 96-4, 1996.
- *4 日本機械学会, 機械工学便覧, A3-80, 1992.
- *5 前川他, 衝撃破壊工学, 日本機械学会, 1990.
- *6 N. Cristescu, 黒崎訳, 衝撃塑性学, コロナ社, 1970.
- *7 E.H. Lee and S.J. Tupper, Analysis of Plastic Deformation in a Steel Cylinder Striking a Rigid Target, J. Appl. Mech., 21, pp. 63-70, 1954.

表紙: コール独首相, 1998年9月28日, ボン, AP/WWP.

C57 形式機関車, 昭和12年~昭和44年, 総製造台数150両, 田澤義郎, 世界文化フォト

株式会社メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス 担当 小山宛 FAX0424-82-5106 (TEL0424-82-1539)

Mech D & A News 解析データ申込書

ふりがな お名前	
貴社名・御所属	
御住所	〒
TEL・FAX	TEL FAX
フロッピーディスクの種別 (をつけて下さい)	・SUN フォーマット ・Windows ・不要(資料のみ)
通信欄	注: 納品書兼請求書は弊社様式で商品と共に送付致します。 代金の振込手数料はお客様の負担とさせていただきます。

御希望の項目に をつけ、金額を記入して下さい。尚、()内の価格はフロッピーディスクを含まない資料だけの金額です。

最新刊		
1	1. 陰解法と陽解法による動的応答解析 (vol.98-3) 2. I-DEAS による非線形構造解析の支援 (vol.98-4, テキスト全約 200 頁)	¥ 10,000 (¥ 8,000) ¥ 10,000 (¥ 8,000)
2	自励振動の解析 <small>以下既刊</small> (vol. 95-1.1)	ブレーキを例にとり、クーロン摩擦による自励振動の発生と対策を、速度依存の外力を定義することによって解析しました。
3	接触による応力集中 (vol. 95-1.2)	曲面同士の接触による応力集中 (Hertz's 応力) の理論解を、接触解析の諸機能 (Gap, CONTACT) を用いて扱った例題です。
4	凝固プロセスの解析 (vol. 95-2.1)	氷の生成を例にとり、相変化を伴う熱伝導と熱応力を解析した例題です。潜熱と凝固体積変化のモデル化がポイントです。
5	大ひずみ粘弾性球の衝突解析 (vol. 95-2.2)	粘弾性球の落下衝突を解析した例題です。衝突速度によって反跳の挙動に差が生ずることを明らかにしました。
6	非ニュートン流体の解析 (vol. 95-3.1)	円管流れの理論解を対象として、粘性流体の速度場を求めました。また、液滴の落下問題を応用例として解析した例題です。
7	粘弾性解析の基礎モデル (vol. 95-3.2)	Maxwell と Voigt モデルによる粘弾性解析の基礎データです。微小ひずみだけでなく、大ひずみの問題を含みます。
8	熱衝撃応力の厳密解 (vol. 95-4.1, vol. 95-4.2)	円盤の表面を急冷する問題を例にとり、非定常熱伝導と熱衝撃応力を求めました。理論解と一致する結果が得られました。
9	ボルト締結の健全性評価 (vol. 96-1)	ボルトの締付力と外力のバランスをモデル化し、締結後の浮上りやへたりを扱った例題です。理論解と一致しました。
10	ロール圧延の解析 (vol. 96-2)	MARC Contact 機能における摩擦解析の精度を向上させ、ロール接触面での速度および圧力の分布を求めた例題です。理論解と一致しました。
11	表面張力の解析 (vol. 96-3.1)	水がストロ - の中を表面張力によって上昇する問題を解析し、理論解と一致することを確認しました。
12	浮遊体の固有振動解析 (vol. 96-3.2)	飛行体のように境界条件を持たない条件下での固有値解析の手法を示す例題です。
13	衝撃応答の解析 (vol. 96-4)	質点の玉突き衝突、落下による衝撃、及び梁の衝撃曲げの理論解と整合させた例題です。
14	接触による応力の集中と減衰 (vol. 97-1)	無限の領域を表現するために、半無限要素を適用した例題です。ゴムの JIS 硬さ試験を取上げて検討しました。
15	MARC ユーザ・サブルーチン支援キット (vol. 97-2)	MARC プログラム本体から、COMMON 変数を用いて種々のデータを取出すサブルーチンをキットとしてまとめました。
16	弾塑性材料試験支援キット (Vol. 97-3)	材料の引張試験データを、べき乗則により曲線近似するプログラムをキット化しました。歪速度依存性への応用を含みます。
17	流体連成振動解析 (Vol. 97-4)	流体によって物体に作用する力の考え方を取りまとめました。付加質量効果を考慮した固有値解析の例題を含みます。
18	MARCK7 による流体解析 (Vol. 98-1)	厳密解のある定常・非定常流れ、混合距離理論による乱流を扱った例題です。いずれも、理論解・実測値に一致します。
19	2次元の線形補間・応力の座標変換 (vol. 98-2)	FEM の支援ツールとして、2次元平面内のベクトルによる線形補間、また、2次元・3次元の座標変換を扱った例題です。

株式会社メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス

〒 182-0024 東京都調布市布田 1-40-2-603

TEL0424-82-1539 FAX0424-82-5106 <http://www.mech-da.co.jp>

小計	_____	円
消費税 (5%)	_____	円
合計	_____	円