



はりのせん断応力とたわみ

Shear bending of Beam problem

R01\_YT/2014/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

通常の はり理論では、はりの肉厚が薄いことを前提として はりの断面に発生するせん断応力によるたわみは無視して理論解が導かれている。しかし はりの長さ比べて厚み大きい場合、あるいは はりに衝撃的な打撃が加わって打撃点のごく近傍に変形が限定されるような場合には、この前提が満足されなくなる。ここではその基本的な考え方を示すために、せん断を考慮した たわみ量の計算、並びに せん断応力の分布について理論解と FEM 解析の結果を比較検証する。

**理論解** 中原, 実践材料力学, p. 104 例題 1 p. 107 例題 3 参照<sup>(1)</sup>.

Fig.1 に示すような長方形断面を持つ片端を固定されたはりの先端に集中荷重を加える。このときはりに発生するせん断応力、及び たわみを求める。諸元は以下の通りである。

はりの長さ  $l=1,000[\text{mm}]$     断面幅  $b=10[\text{mm}]$     断面厚さ  $h=30[\text{mm}]$     荷重  $P=10[\text{kN}]$   
 ヤング率  $E=200[\text{GPa}]$     断面二次モーメント  $I=bh^3/12 = 22,500[\text{mm}^4]$

材料力学による解は以下の通りである。

1. 曲げモーメントとせん断力の関係は

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad \dots (1)$$

2. (1)式を用いて z 軸に直角な断面に生ずるせん断応力  $\tau_{xz}$  を表すと

$$b\tau_{xz} = \int_z^h \frac{d\sigma_x}{dx} b \cdot dz = \frac{dM}{dx} \int_z^h \frac{bz}{I_y} dz$$

$$\therefore \tau_{xz} = \frac{Q}{bI_y} \int_z^h bz \cdot dz \quad \dots (2)$$

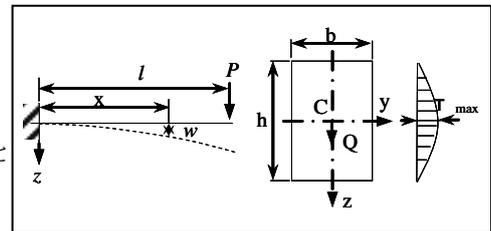


Fig.1 長方形断面を持つ片持ちはり

3. 長方形断面に生ずるせん断応力、及び最大値をとる中立軸上 ( $z=0$ ) では

$$\tau_{xz} = Q \frac{12}{bh^3} \int_z^{h/2} z \cdot dz \quad (\tau_{xz})_{\max} = (\tau_{xz})_{z=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \left( \frac{3}{2} \tau_{mean} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{10000}{10 \times 30} = 50 [\text{MPa}] \quad \dots (3)$$

4. Fig.2 よりたわみは

$$\frac{dw_0}{dx} = \gamma_0 = \frac{(\tau_{xz})_{z=0}}{G} \quad \therefore \frac{dw_0}{dx} = k \frac{Q}{AG} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{AG} \quad \dots (4)$$

5. 片持ちばりでは、せん断力 Q と荷重 P は等価であるため

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{AG} \quad \therefore w_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{AG} x + c \quad \dots (5)$$

6. 曲げ応力によるたわみを加えると、最大たわみは

$$w_{x=l} = \frac{P}{EI} \left( \frac{l^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{I}{AG} \cdot l \right) \quad \dots (6)$$

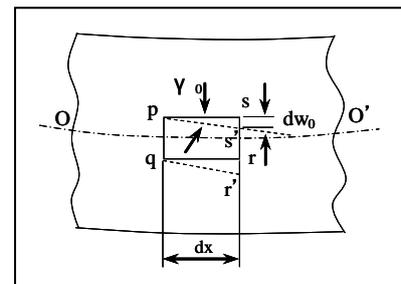


Fig.2 せん断応力によるはりのたわみ

7. さらに 縦弾性係数 E と横弾性係数 G の関係  $2G(1+\nu) = E$  及び、ポアソン比  $\nu=0.$  を考慮し、

たわみを求めると

$$w_{x=l} = w_1 = \frac{Pl^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} \right) = \frac{Pl^3}{3EI} \left\{ 1 + \frac{3(1+\nu)}{4} \frac{h^2}{l^2} \right\} = \frac{Pl^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{l^2} \right)$$

$$= \frac{1000 \times 100^3}{3 \times 20000 \times 22500} \times \left( 1 + 0.75 \times \frac{30^2}{100^2} \right) = 0.79 \text{ [mm]} \quad \dots (7)$$

8. また、せん断力を考慮しないときのたわみは

$$w_{x=l} = w_2 = \frac{Pl^3}{3EI} = 0.74 \text{ [mm]} \quad \dots (8)$$

9. 本例でののはりのたわみで、せん断力が占める割合

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1} = \frac{0.79 - 0.74}{0.79} \times 100 = 6.3 \text{ [%]} \quad \dots (9)$$

したがって、はりたわみの主要素は 曲げモーメント であることがわかる。

### 解析条件

Fig.3 に解析モデルを示す。

- 要素：四辺形応力要素 CPS4I
- 材料定数：ヤング率  $E=200$ [GPa]  
ポアソン比  $\nu=0$
- 荷重：  $P=10$ [kN]

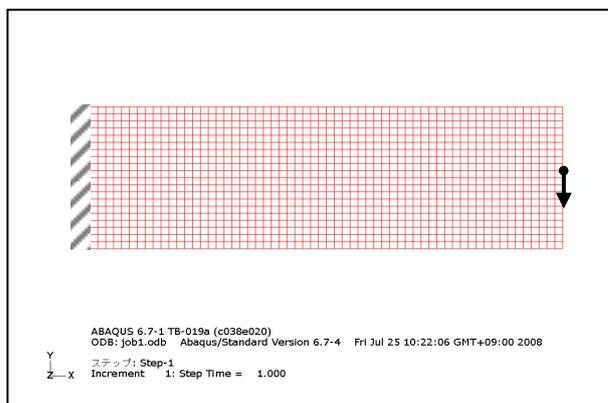


Fig.3 解析モデル

### 解析結果

Fig.4～7 に Abaqus の解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.1 に示す。

理論解に一致する結果が得られた。

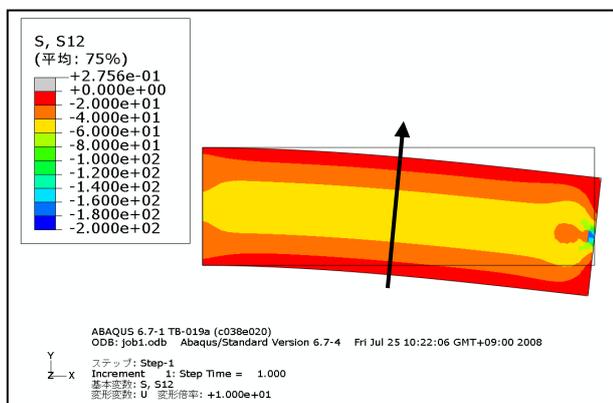


Fig.4 変形図 (せん断応力)

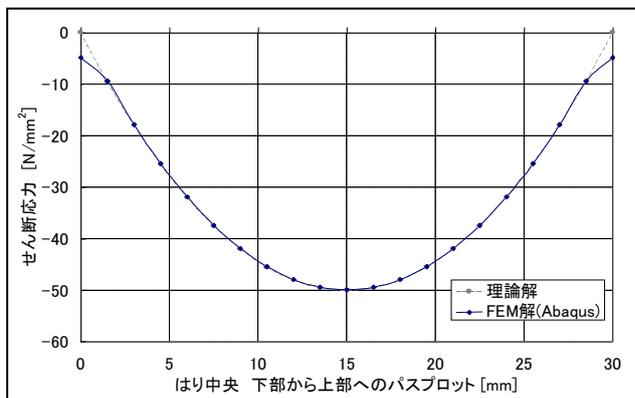


Fig.5 はりの中央断面における せん断応力の分布

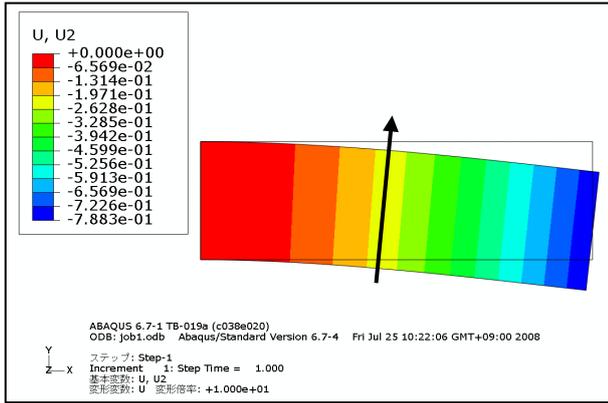


Fig.6 変形図 (たわみ)

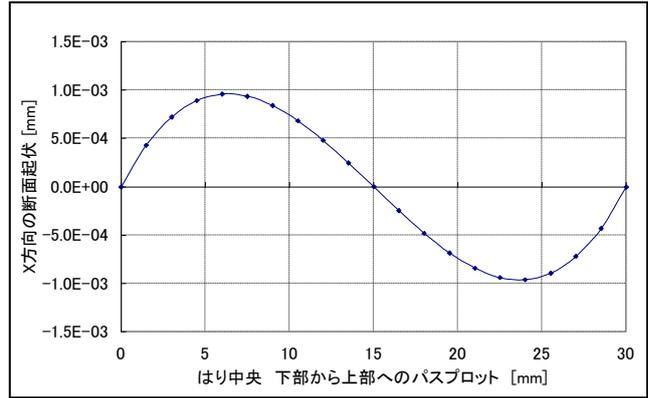


Fig.7 はり中央断面における たわんだ時の断面形状

※ 載荷点近傍でははりの形状が特異なため、はり中央部をサンプリングした。

Table.1 理論解と解析結果の比較

		理論解	FEM 解
最大せん断応力	[MPa]	50	50
たわみ	[mm]	0.79	0.79

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp. 殿の製品です。

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail: comm@mech-da.co.jp http://www.mech-da.co.jp