

vol. 2004-1

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

September 2004



Monet, Argenteuil, 1875.

【特集】 はり解析における諸問題

— その4 曲げねじり連成振動の解析 —

*FEM Consulting Services for Engineering Practice
Find Innovation in Tradition 2008-2019*

【 1 】 はじめに

橋梁・航空機・自動車といった製品は、単に静的な強度を保つだけでなく、固有振動に代表される動的な機能の健全性を維持することが重要です。動的な特性を向上させるためには、軽量化と高剛性化を高い水準でバランスさせることが必要であるため、これらの製品は、はりや薄板といった構造要素からなる組立構造物として設計されるのが一般的です。

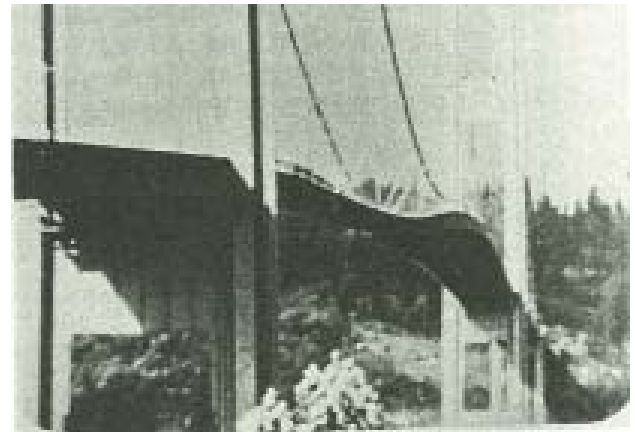
組立構造物の設計において最も困難な課題の一つは、ねじり振動の制御です。最近では、大規模なシェルモデルによる解析が広く行われるために、ねじり振動だけに注目したモデルを作成することはかえって難しくなりましたが、旧来のほりを念頭にした設計手法の中では、ねじりを適切に考慮することはきわめて重要な課題でした。

Fig.1 は、1940 年 11 月に当時世界第 3 位の長大橋であったタコマ・ナロウズ橋が、わずか秒速 19m の風によって落橋した様子を示しています⁽¹⁾。この事故では、部材の揚力特性がねじり角に対して負の勾配を有するために自励振動が発生し、後述のような曲げとねじりの連成振動を成長させて落橋に至ったとされています⁽²⁾。

これ以外にも零戦の開発初期における翼のねじりフラッターによる事故などが知られており、組立構造物のねじり振動は、現在でも克服が難しい課題です。



(a) 発生直後



(b) 発生後 30 分

Fig.1 タコマ・ナロウズ橋の曲げねじり振動 (1940 年) ⁽¹⁾

【 2 】 構造部材のねじり

ねじりに関する理論の本格的な研究は、Coulomb (1738~1806) に始まったとされています⁽³⁾。彼は微小な電磁気力を計測できる鋭敏なねじりばかりを製作するため、円形断面を有する棒のねじり理論を見出しました。これは Fig.2 (a) に示すような一様ねじりと呼ばれる挙動です。一様ねじりは、Jacob Bernoulli (1654~1705) が提案した平面保持の仮定に基づくもので、棒の横断面はねじりを受けた状態でも平面を保つことを想定しています。この考え方は、Coulomb を追った Navier (1785~1836) まで受け継がれたとされています。

しかしながら円形以外の任意断面を有する部材では、Fig.2 (b) に示すようにねじりによって軸方向への断面の変形を生じます。このような変形を断面のそりと称します。その発生によって部材のねじり剛性は急激に低下します。例えば紙を丸めて作った円筒が高いねじり剛性を示すのに対し、はさみで縦に切れ目を入れると、その剛性は著しく損なわれます。甲板のない船底だけのボートや、屋根のない自動車のねじり剛性が極端に低くなるのも、この理由によります。このような Fig.2 (b) に示すねじりの形態を一般に単純ねじり (Pure Torsion) と称します。

単純ねじりにおける剛性の喪失を改善するために、Fig.2 (c) のように断面の軸方向変位を一部拘束することが一般に行われます。この図に示す H 形鋼の例では、先の (b) 図ではフランジ部がせん断変形して軸方向変位を生じていたのに対し、(c) 図では左端を拘束することにより、フランジが幅方向に曲げ変形するようになったことがわかります。すなわち、部材の一部がねじりに伴って曲げを生ずるような拘束を与えれば、ねじり剛性の向上が図れます。

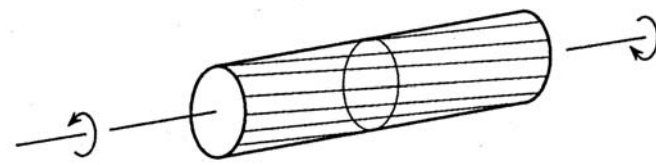
箱形の船体の採用，自動車におけるハードトップの採用はこの例です．このようなねじりの形態を一般的にそり拘束ねじり（Warping Torsion）と称します．

最後に，円形以外の断面形状では横断面の平面保持が維持できなくなる理由を簡単に示しておきましょう．Fig.3は円形および矩形断面を有する棒が点Sを通る中心軸についてねじりを受けた状態を示します．

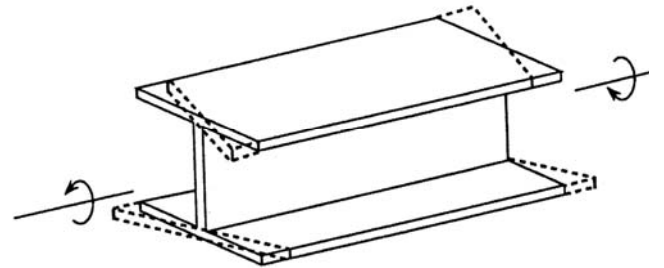
(a) 図に示す円形断面の場合，図中のハッチングに示す微小要素はねじりによる角変位 γ を受けた結果，(c) 図のように変形します．ねじりトルクに対応するせん断応力 $\tau_{z\theta}$ と共役な $\tau_{\theta z}$ （すなわち $\tau_{z\theta}=\tau_{\theta z}$ ）が発生し，棒の横断面は平面保持されていることになります．

一方，(b) 図に示す矩形断面の場合，ハッチングに示すような隅角部に微小要素を考えると，(d) 図のような変形を考慮することはできません．なぜなら(d) 図中の τ_{xz} を表示した面は外力を受けない自由表面であり，実際にはせん断応力を負担することができないからです．

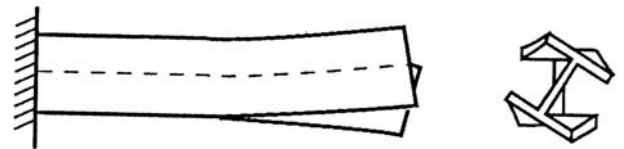
従ってこの部分は(e) 図に示すように応力ゼロで剛体的な回転 γ を生ずることになります．すなわちこの部分はねじり剛性に寄与できない遊びの部分となり，平面保持の仮定も維持できないこととなります．



(a) 一様ねじり



(b) 自由な軸方向変位を伴うねじり
(サンブナンねじり・単純ねじり)



(b) 軸方向変位を一部拘束されたねじり
(曲げねじり・そりねじり・そり拘束ねじり)

Fig.2 構造部材のねじり

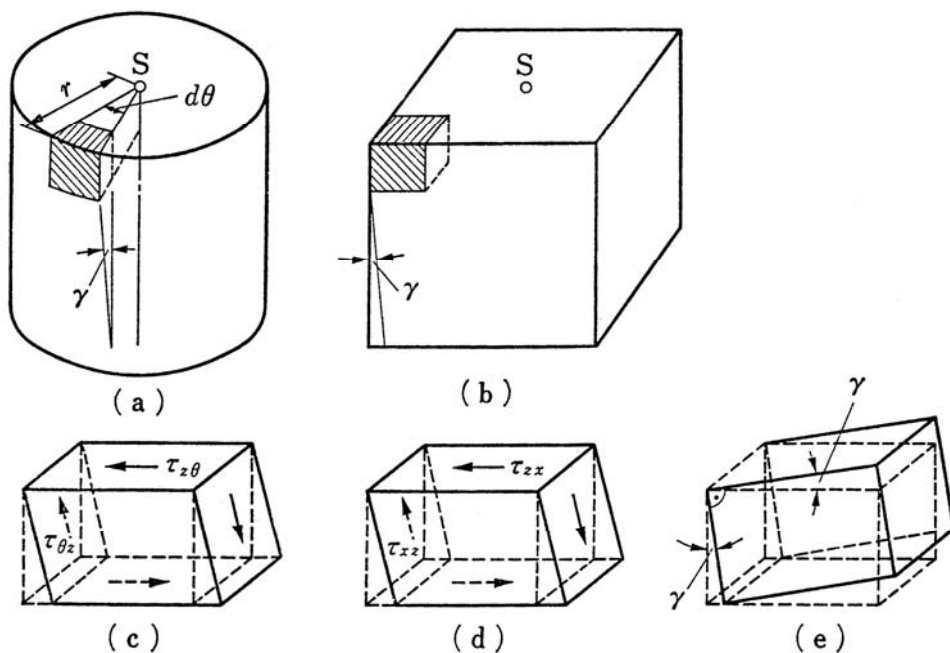


Fig.3 断面の平面保持の考え方⁽³⁾

【3】 はりの曲げとねじりの連成振動

基礎的なはりの振動理論では、はりはその対称面内で振動すると仮定されています。しかし、この仮定が成り立たない場合、曲げとねじりが連成した挙動が現れます。ここで Fig.4 に示すようなチャンネル材（C形鋼）の挙動について考えましょう。

チャンネル材のような非対称な断面のはりに対しては、せん断中心という考え方があります。Fig.4 では $O-O'$ がこれに相当し、もし図中 y 方向の鉛直荷重がこの軸上に与えられるならば、はりは純粋な曲げ変形のみを示し、ねじりを伴わないことが知られています。今回はこのせん断中心軸を x 軸とします。断面の図心軸は $C-C'$ であり、せん断中心軸 x とは一致していないことに注意して下さい。材料力学からチャンネル材のせん断中心の位置は以下のように与えられています。

ウェブ中心からせん断中心までの距離：
$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I_z} \quad \dots (1)$$

図心軸からせん断中心までの距離：
$$c = e + \frac{b^2}{2b + h} \quad \dots (2)$$

ここで b はフランジ幅、 h はフランジ中心間の距離、 t はフランジおよびウェブの厚さです。

一方、鉛直荷重によるたわみ曲線の微分方程式は

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = w \quad \dots (3)$$

ここで w は分布荷重の大きさ（上方が正）、 EI_z は z 軸に関するチャンネル材の曲げ剛性です。いま、荷重が図心軸に沿って分布するならば、この荷重は、せん断中心軸 x に沿って分布する同じ荷重 w と、大きさ wc のトルクに置き換えることができます。この場合、(3) 式で示される曲げとせん断中心軸 x まわりのねじりとが共存することになります。このねじりは一様ではなく、トルクを $T(x)$ とすると、ねじり角 ϕ との間には次の関係があります。

$$T(x) = R \frac{d\phi}{dx} - R_1 \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad \dots (4)$$

ここで、 R は一様なトルクに対するねじり剛性、 R_1 はゆがみ剛性です。なおねじり角 ϕ の正の方向は右手系を構成するように (b) 図の通りとします。(4) 式を微分すると (5) 式が得られ、(3) 式を組み合わせることによって、静荷重が図心軸に沿って分布するときの曲げとねじりの連成変形を得ることができます。

$$R \frac{d^2 \phi}{dx^2} - R_1 \frac{d^4 \phi}{dx^4} = wc \quad \dots (5)$$

一方、はりが振動しているときは、次のような慣性の効果を考える必要があります。

横方向の慣性力：
$$-\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y - c\phi)$$

慣性トルク：
$$-\rho I_P \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \dots (6)$$

ここで、 I_P は図心軸に関する断面の極慣性モーメントです。

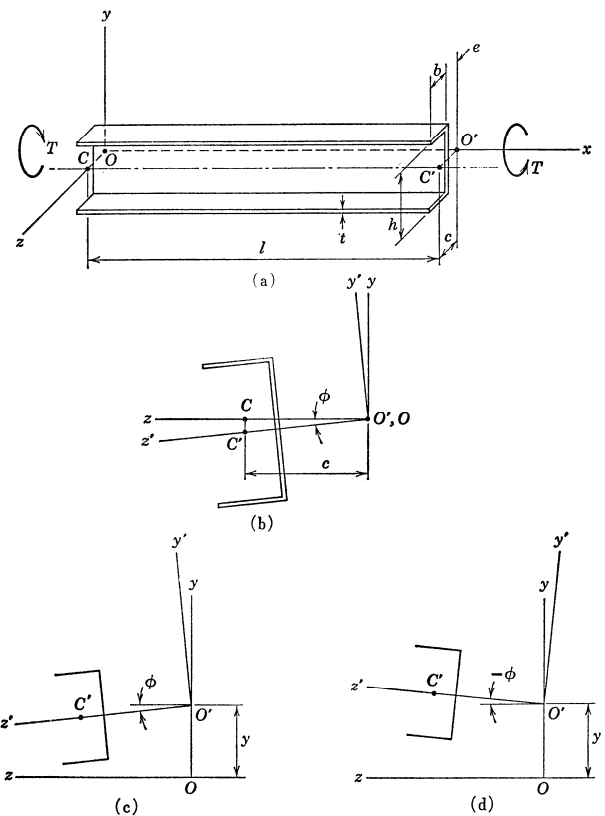


Fig.4 チャンネル材の曲げとねじりの連成⁽⁴⁾

いま、(3) 式と (5) 式の静荷重の代わりにこの慣性力と慣性トルクを用いれば、曲げとねじりの連成振動に関する次の微分方程式が得られます。

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y - c\varphi) \quad \dots (7)$$

$$R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = -\rho A c \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y - c\varphi) + \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \dots (8)$$

ここで、はりが一つの固有モードで振動すると仮定し、次のように置きます。

$$y = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad \varphi = X_1(A_1 \cos pt + B_1 \sin pt) \quad \dots (9)$$

ここで p は固有角振動数、 X および X_1 は正規関数です。(9) 式を (7) 式および (8) 式に代入すると、 X および X_1 に関する次の方程式が得られます。

$$EI_z X'''' = \rho A p^2 (X - cX_1) \quad \dots (10)$$

$$R_1 X_1'''' - R X_1'' = -\rho A p^2 c (X - cX_1) + \rho I_p p^2 X_1 \quad \dots (11)$$

個々の問題に対しては、(10) 式と (11) 式を与えられた境界条件の下で解くことにより、解が得られます。

【 4 】 両端単純支持はりの例

4.1 チャンネル材などの場合（断面が 1 つの対称面を持つ場合）

(10) 式、(11) 式が比較的容易に解ける例としては、両端単純支持はりに対して参考文献 (4) および (5) に結果が示されています。このときの境界条件は以下のように与えられています。

$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0 \text{ および } x = l) \quad \dots (12)$$

これらの境界条件は、両端点で変位 y とねじり角 φ が 0 であるのと同時に、それらの 2 回微分、すなわち曲げモーメントとそりの拘束による応力が発生しない条件を与えています。ここで、これらの条件は次のように置けば満足されます。

$$X_i = C_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad X_{1i} = D_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i = 1, 2, 3, \dots \infty) \quad \dots (13)$$

ここで、 C_i および D_i は定数です。これらを (10) 式および (11) 式に代入し、記号

$$\frac{EI_z i^4 \pi^4}{l^4 \rho A} = \omega_{bi}^2 \quad \frac{(Ri^2 \pi^2 l^2 + R_i i^4 \pi^4)}{l^4 \rho (I_p + Ac^2)} = \omega_{ti}^2 \quad \frac{Ac^2}{I_p + Ac^2} = \lambda \quad \dots (14)$$

を用いると

$$(\omega_{bi}^2 - p_i^2) C_i + p_i^2 c D_i = 0 \quad \dots (15)$$

$$\frac{\lambda}{c} p_i^2 C_i + (\omega_{ti}^2 - p_i^2) D_i = 0 \quad \dots (16)$$

これらの式がゼロでない C_i および D_i の解をもつためには、その行列式がゼロであればよいので、振動数方程式は

$$(\omega_{bi}^2 - p_i^2)(\omega_{ti}^2 - p_i^2) - \lambda p_i^4 = 0 \quad \dots (17)$$

これから

$$p_i^2 = \frac{(\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2) \mp \sqrt{(\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2)^2 + 4\lambda\omega_{bi}^2\omega_{ti}^2}}{2(1 - \lambda)} \quad \dots (18)$$

(18) 式は、チャンネル材のように断面が一つの対称面を持ち、その面と垂直方向に振動する場合はりの固有振動数を与えます。この場合、せん断中心は図心と一致していない、すなわち c はゼロでないので、(18) 式から 2 つの p_i^2 の値が得られます。

このとき (15) 式と (16) 式のかっこ内の大小比較から、 p_i^2 の大きな値に対しては C_i および D_i は同符号、 p_i^2 の小さな値に対しては異符号となることがわかります。 C_i と D_i はそれぞれ変位 y とねじり角 φ の係数であることから、この 2 つの状態を図示すると、Fig.4 (c), (d) のようになります。後述の FEM 解では、Fig.6 の 3 次と 2 次の変形モードの組合せがこれに対応します。

4.2 H 形鋼などの場合（断面が 2 つの対称面を持つ場合）

H 形鋼のように断面が対称でせん断中心と図心が一致する場合、 c はゼロであるので、 $\lambda=0$ となり、

$$p_i^2 = \frac{(\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2)}{2} \mp \frac{(\omega_{ti}^2 - \omega_{bi}^2)}{2} \quad \dots (19)$$

この式から、2 つの固有角振動数は

$$p_{1i} = \omega_{bi} \quad p_{2i} = \omega_{ti} \quad \dots (20)$$

(14) 式からわかるように、これらは曲げ振動とねじり振動が連成しないときの振動数となり、曲げとねじりは互いに独立していることがわかります。

4.3 一般の場合

対称面を持たないはりの場合、問題は複雑になります。このような場合、ねじり振動は 2 つの主軸面内の曲げ振動と連成し、2 つではなく 3 つの連立微分方程式が得られます。実用の飛行機の翼やプロペラは一様な断面でない複雑な形状を有し、これらの問題を解くためには、FEM などの数値解法を利用する必要があります。

【 5 】 FEM による解析

以上に述べたチャンネル材の曲げねじり振動を対象として、FEM 解析を行いました。この問題ではまず要素タイプの選定がポイントとなるため、今回はシェル要素以外に、以下に示すような断面内に積分点を有する形式のはり要素を適用してみました。ソルバーには Marc を用いました。

- ・要素タイプ 75 : 4 辺形厚肉線形シェル要素
- ・要素タイプ 79 : 3 次元薄肉開断面はり要素

Fig.5 に対象とした断面の形状を示します。先に示した理論解に対応する諸元は以下の通りです。

- ・材料定数

ヤング率	E=21000 [kg/mm ²]
ポアソン比	v=0.3
質量密度	$\rho=\gamma/g=8.02 \times 10^{-10}$ [kg sec ² /mm ⁴]

- ・断面定数

断面積	$A=950$ [mm ²]
断面 2 次モーメント	弱軸まわり : $I_y=2.25 \times 10^5$ [mm ⁴], 強軸まわり : $I_z=1.43 \times 10^6$ [mm ⁴]
図心とせん断中心の距離	$c=31.25$ [mm]
ねじり剛性	$R=GJ=6.39 \times 10^7$ [kg mm ²]
ゆがみ剛性	$R_1=EC_w=7.25 \times 10^{12}$ [kg mm ⁴]
極慣性モーメント	$I_p=I_y+I_z=1.66 \times 10^6$ [mm ⁴]

- ・その他の条件

はりの長さ	$l=2500$ [mm] (せん断変形の影響が現れないように十分な長さを採用した。端点の境界条件は、(12) 式による。)
-------	--

今回検討した理論解には、はりの横せん断による変形の効果は含まれていません。しかしシェル要素によるモデル化ではせん断の効果も含まれてしまうため、解析モデルの長さを十分にとり、曲げ変形に比べて横せん断による変形が無視できるように配慮しました。一般には、はりの断面の高さに対して 20 倍程度以上の長さを採用することによって、曲げ変形を卓越させることができます。

また端部の境界条件は図心に対して与える必要があります。シェル要素の場合は参照節点を両端面の図心上に置き、この参照節点を回転中心とするようにウェブの節点との間に剛体領域 (MPC) を定義して、境界条件を与えました。このときフランジの節点まで剛体領域に含めると、断面のそりを拘束してしまい、境界条件を満たさなくなるので注意して下さい。

ビーム要素の場合は、図心位置を原点として断面形状の座標を与えることによって、連成の効果を表現することができます。図心ではなくせん断中心を原点とすると、純ねじりを表現したい場合には正しい結果を与えますが、連成の効果は現れなくなってしまうので、目的に応じて適切に使い分ける配慮が必要です。

解析結果を Fig.6 と Table1 に示します。まず最低次には、はりの弱軸 (I_y) に関する曲げのモードが現れます。このモードははりの断面の対称面 (今回は水平面) に平行な方向の振動であるので、4.1 に示したようにねじりとの連成の効果は無いことに注意して下さい。従って固有振動数は (18) 式ではなく、通常のはりの公式によって求められます。同様に 4 次および 7 次も非連成の弱軸に関する曲げのモードです。

これに対して 2 次と 3 次は (18) 式で計算される連成のモードです。i=1 に対して 2 つの固有振動数が計算されます。連成の基礎となるはりの強軸 (I_z) に関する曲げと、ねじりの固有振動数を (14) 式を用いて計算すると以下のようになります。

はりの強軸 (I_z) に関する曲げのモード	:	$\omega_{bi}/2\pi=50$ [Hz]
ねじりのモード	:	$\omega_{ti}/2\pi=38$ [Hz]

Table1 に示すように 2 次のモードは 34Hz であり、連成の効果によって、上記の単独のモードを下回る固有振動数が現れることがわかります。Fig.6 を見ると、この 2 次のモードではチャンネル材が口を開くようにしてねじれ、同時に上方向にたわむ変形を示しています。直感的にも理解しやすい結果になっています。

窓に下ろしたブラインドがわずかの風で手がつけられないほど大きく振動するのは、風の揚力によって励起された曲げねじりの振動モードが、ねじり角に対する負の揚力特性 (負の減衰) によって自励振動を起こすからです。このとき風の速度エネルギーは、際限なくブラインドの振動エネルギーに変換されることとなります。冒頭のタコマ橋の事故は、このような現象が原因であったと今日では判断されています。

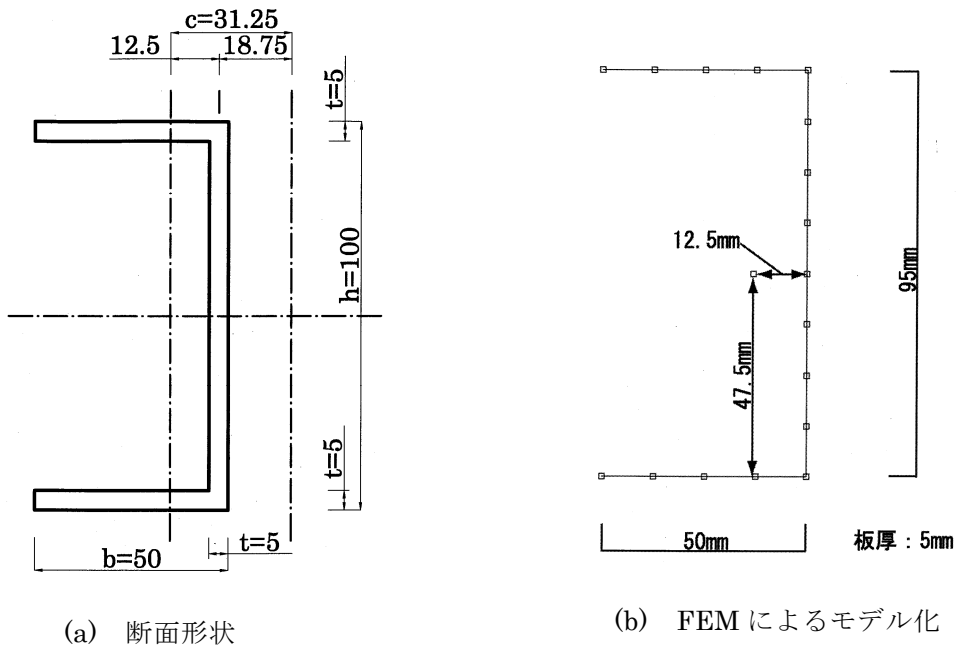
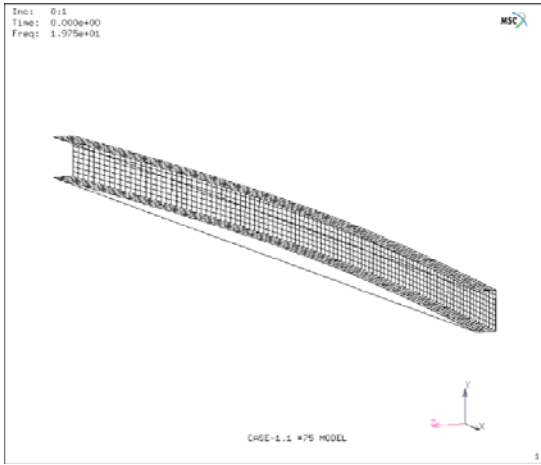


Fig.5 解析対象 (チャンネル材)

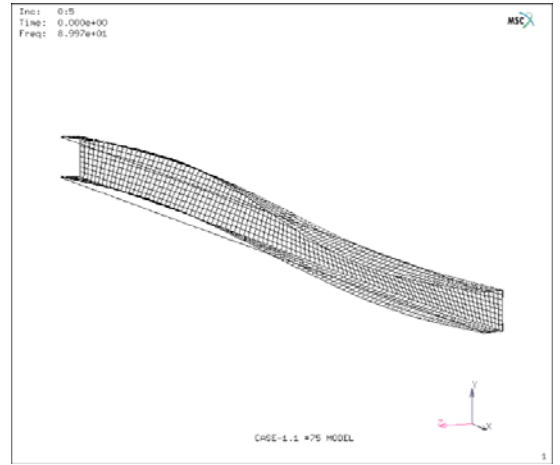
Table1 固有振動数の解析結果

次数	モード区分	固有振動数[Hz]		
		理論解	シェル要素(#75)	はり要素(#79)
1	非連成曲げ 1 次	20	20	20
2	連成(i=1)	34	34	34
3	連成(i=1)	71	69	70
4	非連成曲げ 2 次	79	79	79
5	連成(i=2)	88	90	91
6	連成(i=3)	166	169	171
7	非連成曲げ 3 次	178	175	178
8	連成(i=2)	260	246	256

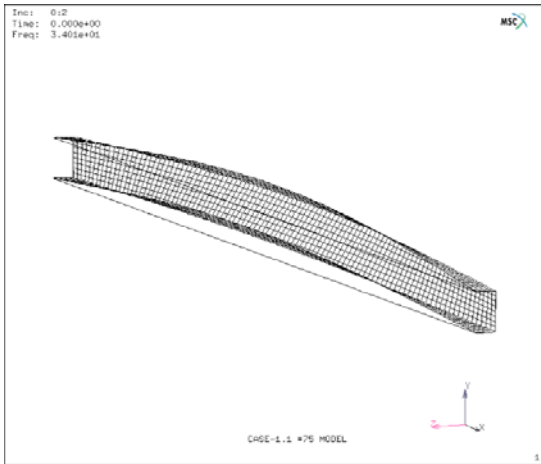
1次



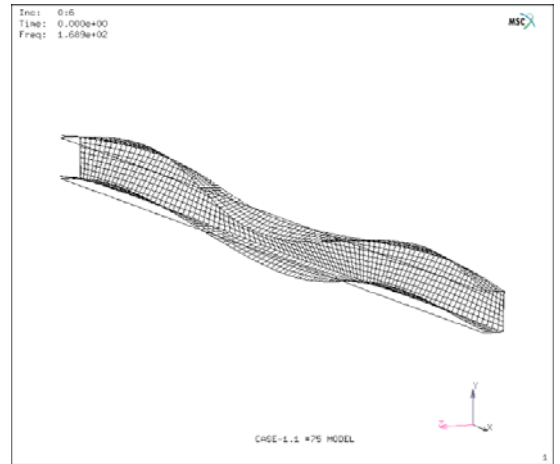
5次



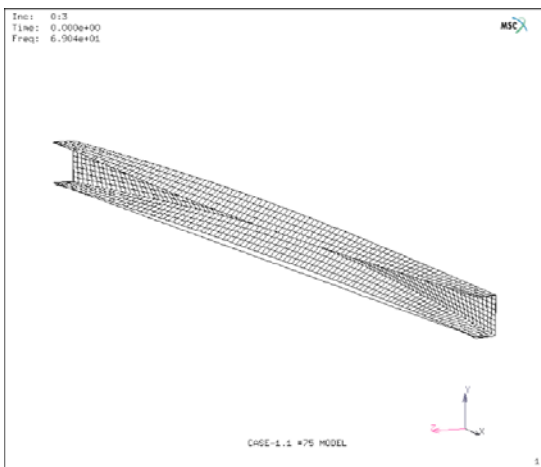
2次



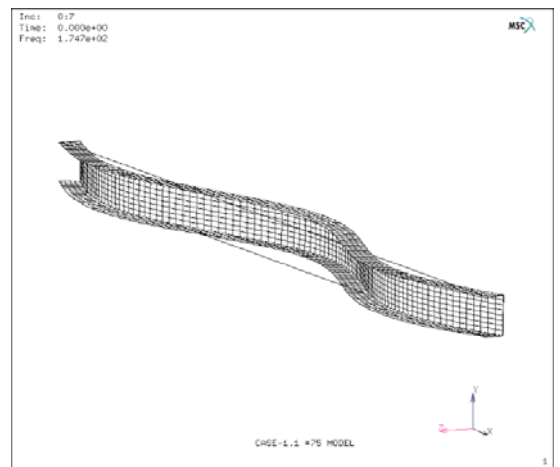
6次



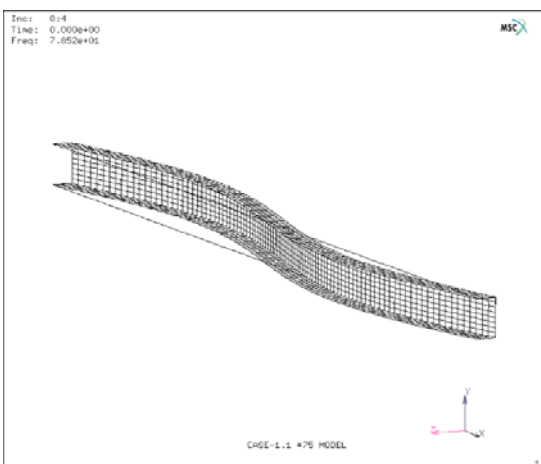
3次



7次



4次



8次

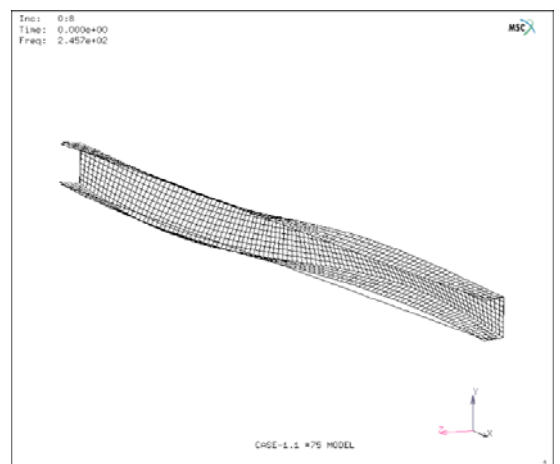


Fig.6 シェル要素による固有振動モードの解析結果

参考文献

- (1) 川田, だれがタコマを墜としたか, 建設図書, 1975.
- (2) Vlasov, V. Z., 奥村他訳, 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
- (3) 高岡, 構造部材のねじり解析, 共立出版, 1974.
- (4) Timoshenko, S. P., et al., 谷口, 田村訳, 新版工業振動学, コロナ社, 1977.
- (5) 藤谷, 薄肉はり構造解析, 培風館, 1990.

表紙 : Claude Monet, Argenteuil, Musee de l'Orangerie, 1875.,

Photo : J. G Berizzi.

*Marc はエムエスシーソフトウェア株式会社殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail:comm@mech-da.co.jp <http://www.mech-da.co.jp/>