

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

September 2003



四天王立像 広目天・多聞天 (奈良)

## 【特集】 はり解析における諸問題

### — その3 衝撃問題の解析 —

## 【1】衝撃問題とはり要素

「連続体要素（ソリッド要素）」が構造物の形状をそのまま表現するのに対して、構造物の形状あるいは変形の様態から、その特徴を生かして簡便なモデル化を施した要素を「構造要素」と呼びます。シェル要素やはり要素はその代表的なもので、3次元の構造物をそれぞれ2次元、1次元に退化させた要素です。

はり要素を一言で言えば、「曲げを受ける棒」ということになります。棒という名称は細長い部材すなわち断面積に比べて大きい長手寸法を持った部材をイメージしています。また曲げという用語は棒が横荷重（軸直交荷重）を受けてたわむ挙動を示しています。同じ荷重を棒の軸方向に加えた場合に比べて、曲げは著しく大きな変形を示します。すなわち、細長い部材の曲げたわみが卓越する問題を解析するのが、はり要素の目的ということになります。

静的な問題であれば、棒を支える支点間の距離に対して棒の断面寸法（特に高さ）が小さいことが、はり部材としてのポイントになります。高さが小さいということは断面2次モーメントが小さく、曲げが変形の主体となるからです。支点間距離に比べて断面の高さが1/10～1/20程度以下であれば、曲げ以外の変形の影響はほとんど隠されてしまいます。

一方、動的な問題では支点間距離に代えて、考えている振動の波長が問題になります。一般的な構造物は、剛な設計、すなわち固有振動数をできるだけ上げて、外力による励振を避ける設計を採用することが大半です。このような場合は、固有振動として最低次付近のモードを評価することが多いのです。そのため、例えば両端支持はりであれば、1次の固有モードは静的なたわみ変形にほぼ等しく、はりモデルの適用が問題になるようなことにはなりません。しかしながら、振動騒音や動的安定性のような高水準の課題では、高周波領域での応答も含めて重要となるため、静的解析で良い結果を与えるはりモデルを、そのまま適用することが妥当とは限りません。

このような高周波領域にはりモデルを適用する課題に対しては、ティモシェンコに先駆的な知見<sup>(1)</sup>があり、「ティモシェンコはり」として汎用FEMの要素ライブラリに加えられています。今回はそれを紹介するとともに、最も代表的な例題として衝撃曲げ問題の実測値との比較検討を行い、通常のエラー・ベルヌーイはりを適用した場合の不具合についても例証します。

## 【2】はりの自由振動

まず真っすぐなはりの横振動について考えましょう。はりの軸線に沿いFig. 1のようにx軸をとり、これに垂直なはりのたわみをyとします。はり断面の高さは軸長に比べて小さいと仮定し、「はりの横断面は曲げを受けても平面を保ち、軸線に垂直である。」というオイラー・ベルヌーイの初等曲げ理論が成立するものとする、横断面内の曲げモーメントMは(1)式で表されます。

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots (1)$$

ここにIははりの断面2次モーメントで、EIは曲げこわさです。いまxにおける長さdxのはりの微小要素mnを考えると、断面m, nに作用する曲げモーメントとせん断力はFig. 1のようになります。一方、Aをはりの断面積、ρをはりの単位体積あたりの質量とすると、mnの質量はρAdxとなります。はりの変位は微小とし、たわみ曲線がほとんど平坦であるとみなすと、微小要素mnの運動はxに垂直な並進のみと考えてよいので(2)式が成り立ちます。

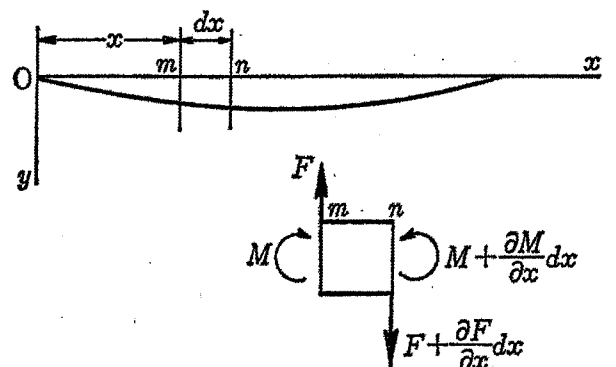


Fig. 1 はりに作用する曲げモーメントとせん断力

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} dx, \quad F dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0 \quad \text{あるいは} \quad \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \dots (2)$$

(2) 式に (1) 式の  $M$  を代入し、また、はりの断面が一様かつ材質も一様とすると、(3) 式が得られます。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (3)$$

この式は、要素  $mn$  の回転は微小として無視し、並進運動のみを考えたオイラー・ベルヌーイの仮定に基づくはりの運動方程式です。

### 【3】高次振動に対するはり理論の拡張

次に、はりの高次振動に適用できる方程式を導いてゆきましょう。高次振動では、はりの高さに比べて振動の波長が十分に長いというオイラー・ベルヌーイの前提が崩れてしまいます。これを補正するための方策としては、次の2点が考えられます。

- ・回転慣性の考慮 : 軸直交方向への並進変位以外に、たわみ曲線の傾きに対応する回転慣性力の効果を含める。
- ・せん断変形の考慮 : オイラー・ベルヌーイはりは変形後の断面が平面を保持すると仮定しているが、断面のせん断変形によりこの仮定が崩れるので、これを補正する。

以下に順にこれらの効果について検討しましょう。

#### 3.1 回転慣性の考慮

振動の波長が短いときは、Fig. 1 に示した微小要素  $mn$  は並進運動のみではなく回転運動を伴います。この場合、回転角はたわみ曲線の傾き  $\partial y / \partial x$  で表され、回転角加速度は  $\partial^2(\partial y / \partial x) / \partial t^2$  となります。要素  $mn$  において中立軸回りの慣性モーメントは  $\rho I dx$ 、作用するモーメントは  $F dx - (\partial M / \partial x) dx$  です。したがって要素  $mn$  の回転の運動方程式は次式のようになります。

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = F - \frac{\partial M}{\partial x} \quad \dots (4)$$

(4) 式の  $F$  を (2) 式の第1式に代入し、かつ (1) 式を用いれば (5) 式が得られます。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (5)$$

これははりの回転慣性を考慮した運動方程式であり、第2項が回転慣性の影響を表しています。

#### 3.2 せん断変形の考慮

たわみ振動においては、横断面上には垂直応力だけでなくせん断応力  $\tau$  も作用し、その総和がせん断力  $F$  となって表れています。このせん断力のため2つの断面間には相対的なすべりを生じ、たわみを生じます。Fig. 2 において長さ  $dx$  の  $mn$  部分において中立面上のせん断力によるたわみを  $dy$ 、せん断角を  $\beta$  とすれば、図より

$$\frac{dy}{dx} = \beta = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{kF}{GA} \quad \dots (6)$$

ここに  $k$  は中立面上の最大せん断応力  $\tau_{\max}$  と平均せん断応力  $F/A$  との比であり、初等材料力学によれば長方形断面では  $3/2$ 、円形断面では  $4/3$  であることが知られています。より正確な推定としては Cowper<sup>(2)</sup> によりポアソン比を  $0.3$  とした場合、(9) 式に示すような  $k$  の逆数として長方形断面では  $k' = 0.850$ 、円形断面では  $k' = 0.886$  が与えられています。最近の汎用 FEM ではこの Cowper による結果を採用し、せん断を考慮したはり要素を用意していることが多いようです。

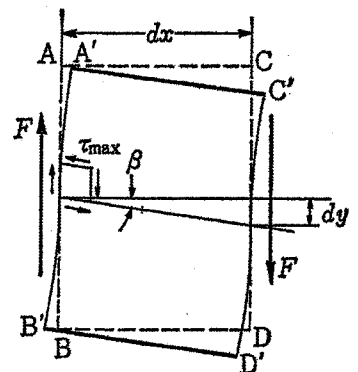


Fig. 2 はりのせん断力

以上の知見をもとに、せん断応力によるたわみをも考慮して、さらに正確なはりの運動方程式を導いてみましょう。いま  $\psi$  をせん断力の影響を考えない曲げのみによるたわみ曲線の傾きとすると、傾きの総量は

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \beta \quad \dots (7)$$

一方、曲げモーメントおよびせん断力は

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad F = k' \beta GA = k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) GA \quad \dots (8)$$

ここに  $k' = 1/k \quad \dots (9)$

要素  $mn$  の並進および回転の運動方程式は外力  $Q(x, t)$  も考慮すると、(2) 式、(4) 式より

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, t), \quad \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F - \frac{\partial M}{\partial x} \quad \dots (10)$$

上式に (8) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' AG \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - Q(x, t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' AG \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (11)$$

(11) 式ははりのせん断変形と回転慣性を共に考慮した運動方程式であり、ティモシェンコにより初めて導かれました。この式から  $\psi$  を消去すると (12) 式が最終的に得られます。この方程式に従うはり要素はティモシェンコはりと呼ばれ、汎用 FEM に組込まれています。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = Q(x, t) + \frac{\rho I}{k'AG} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{EI}{k'AG} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad \dots (12)$$

せん断変形を考えなければこの (12) 式は (5) 式に、回転慣性をも無視すれば (3) 式のオイラー・ベルヌーイはりの式に帰着します。

#### 【4】固有振動数に対する回転慣性とせん断変形の影響

次に、回転慣性およびせん断変形の影響をみるために単純支持はりの自由振動を考えてみましょう。はりの長さを  $l$  とし、その自由振動を以下のように仮定します。

$$y = C \sin \frac{\pi x}{l} \sin pt \quad \dots (13)$$

(13) 式を外力  $Q(x, t) = 0$  とおいた (12) 式に代入すると次式が得られます。

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\pi^4}{l^4} - p^2 - \frac{\pi^2 R^2}{l^2} p^2 - \frac{\pi^2 R^2}{l^2} \frac{E}{k'G} p^2 + \frac{\rho R^2}{k'G} p^4 = 0 \quad \dots (14)$$

┌──────────┐
┌──────────┐
┌──────────┐  
 回転慣性の効果    せん断変形の効果    回転慣性及びせん断変形を同時に  
 考慮した場合に現れる項

(14) 式の最初の 2 項を採用すると以下のように並進運動のみを考えたオイラー・ベルヌーイはりの固有角振動数が得られます。

$$p_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \dots (15)$$

また、(14) 式の最初の 3 項までを採用すると以下のようになります。これは回転慣性の影響を取り入れた場合の固有角振動数です。

$$p_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 R^2}{l^2}}} \dots (16)$$

更に、せん断変形の影響も考慮した場合の固有角振動数  $p_4$  は (14) 式の全ての項を用いて解く必要があります。いま (14) 式の左辺の最後の項は (15) 式を用いると (17) 式のように書くことができます。  $\pi^2 R^2/l^2$  を小とすると (17) 式は 2 次の微小量となり、(14) 式の他の項に対して無視できます。したがって (18) 式が求められます。これは回転慣性とせん断変形の影響を取り入れた場合の固有角振動数です。

$$\frac{\rho R^2}{k'G} p^4 = p^2 \frac{E\pi^4 R^4}{k'G l^4} \dots (17)$$

$$p_4 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 R^2}{l^2} \left(1 + \frac{E}{k'G}\right)}} \dots (18)$$

これらの理論解は参考文献 (3) から引用させていただきました。ここで  $p_1$  の (15) 式および  $p_2$  の (16) 式は厳密解です。また  $p_3$  は記載がなく、 $p_4$  は近似解となっています。なお  $p_4$  についてはティモシェンコ<sup>(1)</sup> は僅かに異なる近似解を与えています。

今回は例として長方形断面のはりを対象として、条件の違いによって求まる固有角振動数が一般のオイラー・ベルヌーイはりに対してどの程度異なるか検討してみました。理論解の計算では、近似式を使用せず (14) 式を直接解き、 $p_1 \sim p_4$  を求めてみました。なお長方形断面のせん断応力に関する係数  $k'$  としては、Cowper<sup>(2)</sup> に従い 0.85 を採用しました。

Table 1 と Fig. 3 に結果を示します。はりの高さ と長さの比  $h/l$  が大きくなるに従い、回転慣性とせん断変形の影響が大きくなるのがわかります。また汎用 FEM に用意された要素群は良好な結果を与えることが確認できました。

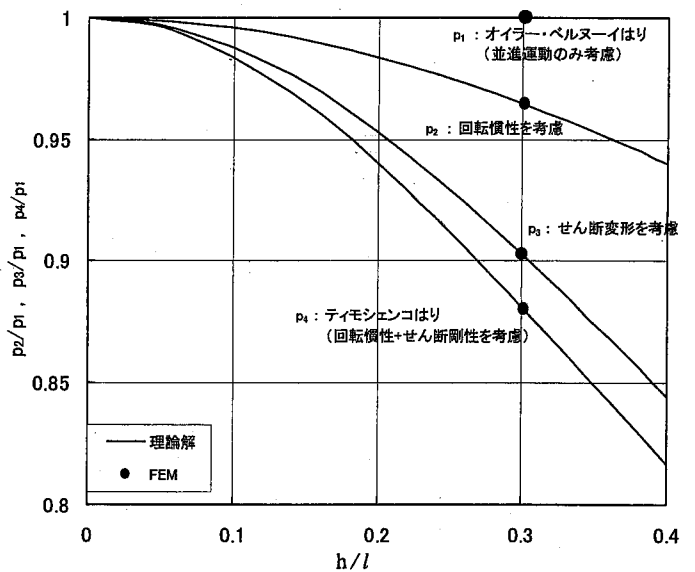


Fig. 3 回転慣性とせん断を考慮したはりの固有振動数

Table 1 回転慣性とせん断変形を考慮したはりの固有振動数

	理論解 [Hz]	ABAQUS [Hz]	Marc [Hz]
$p_1$ : オイラーベルヌーイはり (並進運動のみ考慮)	8353	8353 (要素タイプ 52)	8353 (B33)
$p_2$ : 回転慣性を考慮	8060	—	8061 (B31) (せん断剛性を無限大として入力)
$p_3$ : せん断変形を考慮	7543	7545 (要素タイプ 98)	—
$p_4$ : ティモシェンコはり (回転慣性 + せん断変形を考慮)	7362	7349 (要素タイプ 45)	7362 (B31)

解析条件 : 形状  $l \times b \times h = 83.333 \times 25 \times 25$  [mm] ( $h/l = 0.3$ ),  $k' = 0.85$

$E = 21000$  kg/mm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $G = 8079.6$  kg/mm<sup>2</sup>,  $\rho = 8.02E-10$  kg sec/mm<sup>4</sup>

## 【5】はりの衝撃曲げ問題への応用

次に回転慣性とせん断の効果を有するはりの例として、衝撃曲げ問題について検討してみました。この問題に対しては、中原らによる一連の研究<sup>(4)</sup>があり、Fig. 4 にその代表的な試験の例を示します<sup>(5)</sup>。この試験では、長方形断面のはりの両端を単純支持し、その中央に弾性丸棒を落下させています。材質は、はり、丸棒ともに軟鋼です。

Fig. 6 は、はりの衝撃点に生ずる応力の時間的変動を測定した結果です。応力は衝撃直後に急激に増大しますが、A 点で減少し始めます。A 点は、落下された弾性棒の内部を伝播する圧縮応力波が上端で反射され、引張応力波となって再び衝撃点に戻った時刻を示します。棒の長さおよび材質を変えて行った試験から、その応力波の速度は 1 次元の縦波の伝播速度である (19) 式に一致することが確認されています。A 点以降では弾性棒ははりから離れ反跳します。

また B 点のはりの内部を (20) 式に示す横波 (曲げ応力) が伝播し、左右の端面で反射して再び戻ってきた時刻に相当します。また Fig. 7 は Fig. 6 と同じ応力の波形を長時間まで表示した結果です。

これらの図の右側は ABAQUS および Marc によって得られた解析結果です。Fig. 5 に示すはりのモデル化には回転慣性とせん断変形を考慮したティモシェンコはり要素を使用しました。ABAQUS では B32, Marc では要素タイプ 45 (いずれも 2 次要素) に相当します。はりの直上から初速度を与えた丸棒に相当する要素をギャップ要素を介して衝突させ、ニューマーク・ベータ法 (ABAQUS では HHT 法) による時刻歴解析を行いました。

はりの要素長は約 10mm、衝撃初期の時間増分は 1. E-6sec とし、下記の弾性波の伝播が少なくとも 1 ステップ内で要素をまたがないように配慮しました。減衰は時間増分以下の周期をもつ高周波が過減衰となるようにレイリー減衰の  $\beta$  を与えましたが、数値的な安定を図ることが目的で構造的な減衰を意図したものではありません。また単に曲げ振動だけではなく、たわみに伴って発生する軸方向応力を正しく表現するため、解析には幾何学的非線形性を考慮しました。

このようなモデル化の結果、実測値を正確にトレースする結果が得られました。衝撃点から、300mm および 600mm 離れた点の応力変動を測定した結果を Fig. 8 と Fig. 9 に示します。図中、A 点と B 点は先に Fig. 6 において説明した通りです。Fig. 9 に示す 600mm の位置の場合、まず C 点でわずかな応力変動が起こり、D 点で急激な変動を生じています。C 点は速度  $c_0$  の縦波、D 点は速度  $c_s$  の横波が衝撃後に初めて到達した時刻に相当します。今回の条件ではこれらの速度は以下の通りです。

$$\text{縦波の伝播速度 } c_0 = \sqrt{E/\rho} = 5100 \text{ m/sec} \quad \dots (19)$$

$$\text{横波の伝播速度 } c_s = \sqrt{G/\rho} = 3200 \text{ m/sec} \quad \dots (20)$$

小高ら<sup>(5)</sup>は、横波の伝播速度が (20) 式で表されることに着目し、動的なせん断変形の挙動が断面内の最大せん断応力よりは平均せん断応力に支配されると結論づけています。今回の FEM の結果は概ねこの結論を裏付けています。

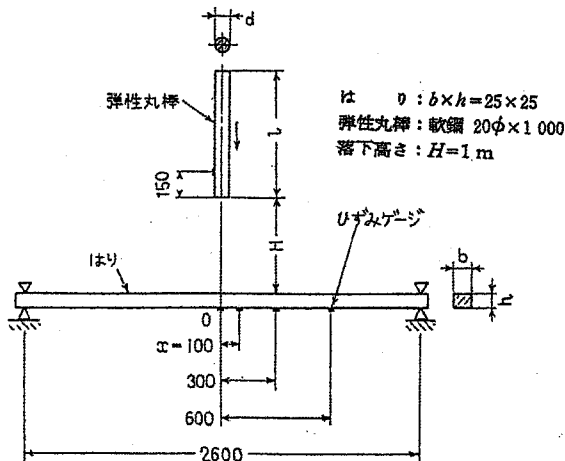


Fig. 4 はりの衝撃曲げ試験<sup>(5)</sup>

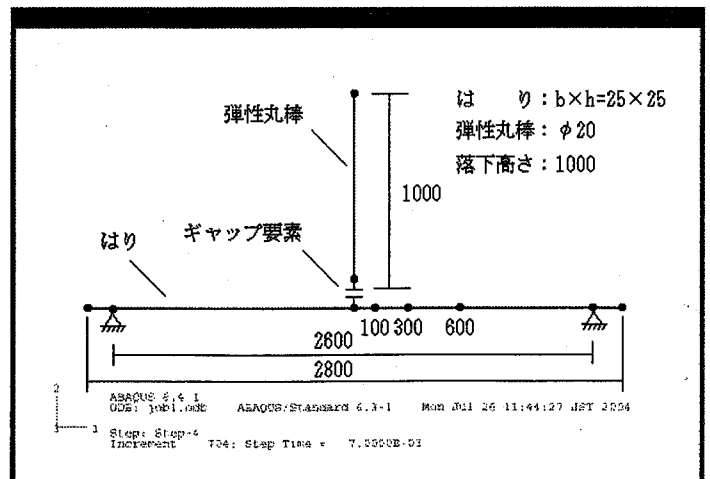
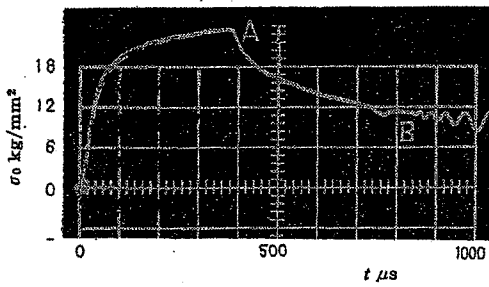
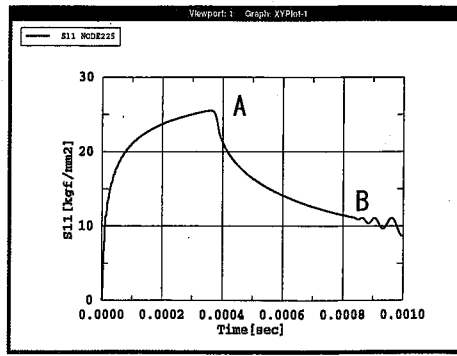


Fig. 5 解析モデル

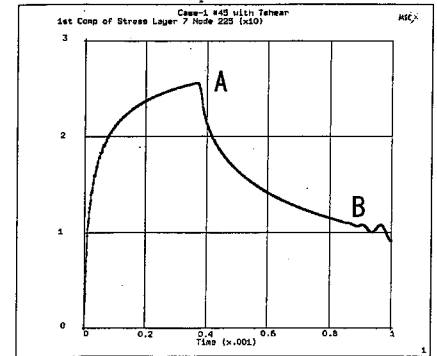


A点 :  $(1000 \times 2) / 5100E3 = 0.00039$  sec  
 B点 :  $(1400 \times 2) / 3200E3 = 0.00088$  sec

実測

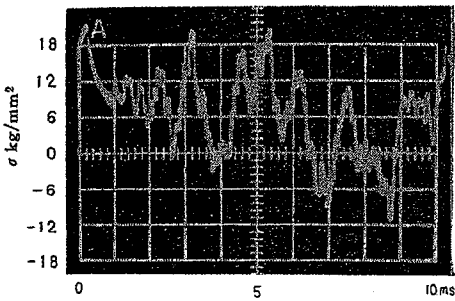


ABAQUS

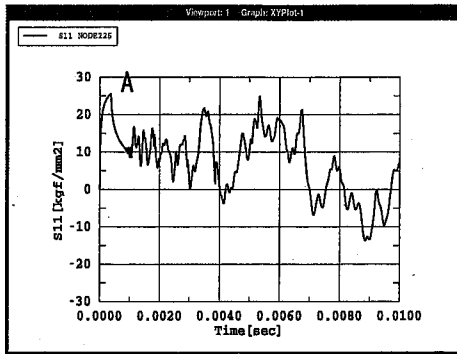


Marc

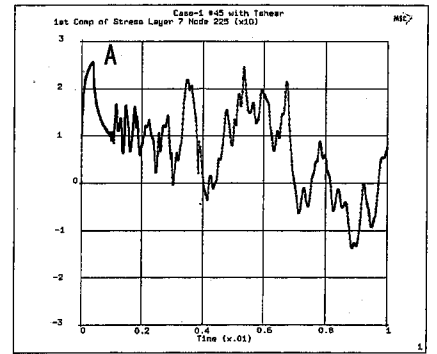
Fig. 6 衝撃点下面のはりの応力 (衝撃直後)



実測

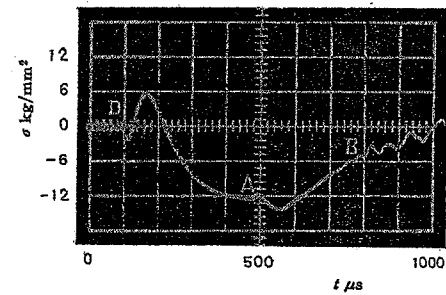


ABAQUS

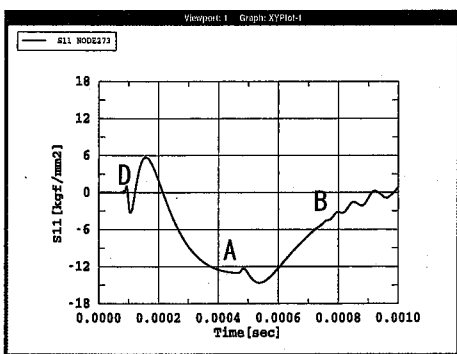


Marc

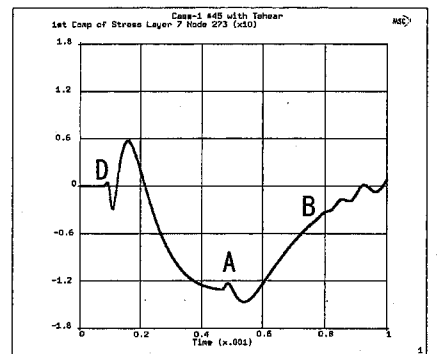
Fig. 7 衝撃点下面のはりの応力 (長時間挙動)



実測

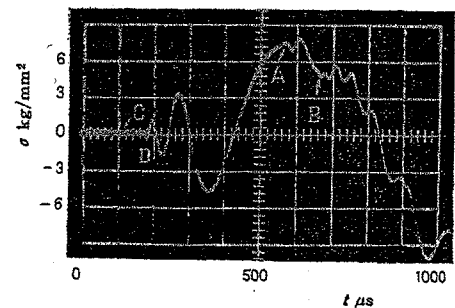


ABAQUS



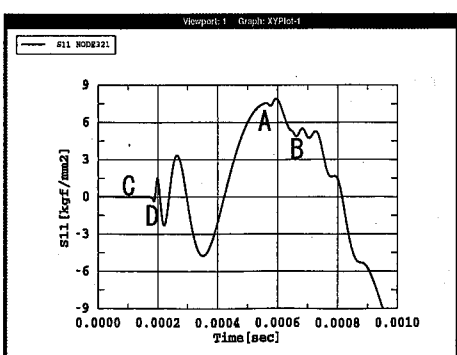
Marc

Fig. 8 衝撃点から300mmにおける応力

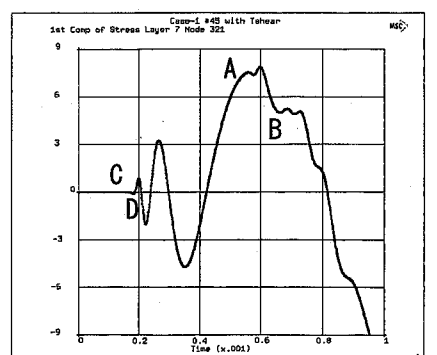


C点 :  $600 / 5100E3 = 0.00012$  sec  
 D点 :  $600 / 3200E3 = 0.00019$  sec

実測



ABAQUS



Marc

Fig. 9 衝撃点から600mmにおける応力

## 【補遺】オイラー・ベルヌーイはりの限界

高周波領域の振動問題に、オイラー・ベルヌーイはりを適用すると、弾性波の伝播速度の表現において限界が現れることが知られています<sup>(3)</sup>。これを説明するために、まず(3)式を書き直します。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -c^2 R^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad \text{ここに} \quad c^2 = E/\rho, \quad R^2 = I/A \quad \dots (21)$$

一般の波動方程式と異なり、(21)式の解として  $y = f(x \pm ct)$  の形式は満足されないで、それに代えて余弦状の曲げ波が速度  $v$  で棒に沿って伝播する場合を考えます。この場合曲げ波は  $x - vt$  が  $2\pi/\xi$  だけ変化すると1波長を描くので、この場合の波長  $\lambda$  は(23)式のようになります。また(22)式が(21)式を満足するためには(24)式を満たす必要があります。

$$y = C \cos \xi(x - vt) \quad \dots (22)$$

$$\lambda = 2\pi/\xi \quad \dots (23)$$

$$\xi^2 v^2 = c^2 R^2 \xi^4 \quad \dots (24)$$

(24)式に(23)式を代入すると、オイラー・ベルヌーイはりの曲げ波の伝播速度  $v$  は以下のように求まります。

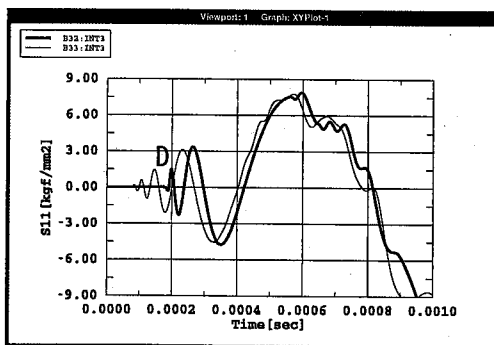
$$\frac{v}{c} = \frac{2\pi R}{\lambda} \quad \dots (25)$$

すなわち(22)式で表されるような調和波の伝播速度は波長によって異なり、波長が短いほど早く伝播することがわかります。一般的な波動は調和波の重ね合わせとして表現されるので、はりの横振動の波形は徐々に形を崩しながら伝播するという重要な結論が導かれます。しかし(25)式のような簡単な表記であると無限小の波長の波の伝播速度は無限大となる不合理があるため、注意が必要です。現実のはりでは、せん断変形が有限の剛性によって支配されているので、横振動の伝播速度は先に示した(20)式のような形で頭打ちになります。

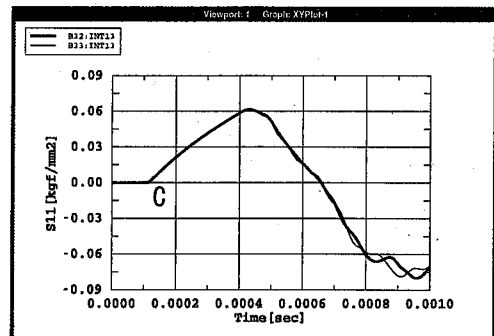
今回の衝撃曲げの問題でこの様子を実際に見てみましょう。先に Fig. 9 に示した衝撃点から 600mm における応力を Fig. 10 に再度示します。左の図ははりの曲げ応力すなわち横振動による応力を示します。(20)式の横波の伝播速度から 600mm 位置への到達時刻は  $600/3200E3 = 0.00019\text{sec}$  と推定され、図中太線のティモシェンコはり (B32) の結果はこの時刻 (D 点) を正確に表現しています。これに対して細線のオイラー・ベルヌーイはり (B33) はこれよりも早い時刻で応力が発生し、上記の高周波領域における適用制限の説明を裏付けています。

一方、Fig. 10 の右図は、はりの断面平均の軸方向応力、すなわち縦振動による応力を示します。一般にはりの縦振動の伝播は波動方程式に従い、その速度は(19)式に示される一定値となることが知られています。600mm 位置への到達時刻は  $600/5100E3 = 0.00012\text{sec}$  と推定され、はりの種類によらずこの時刻 (C 点) が正確に表現されていることがわかります。なお前述のように、この縦振動は幾何学的非線形性の効果によって、横方向の衝撃荷重から励起されたものです。

Fig. 10 の左図と右図の比較から、オイラー・ベルヌーイはり (B33) の横振動と縦振動の到達時間は同程度であることがわかります。そこで(25)式において  $v/c=1$  とおくと、今回のケースでは曲げ波の波長  $\lambda$  は約 50mm と計算されます。今回 B33 を用いたモデルの 1 要素の長さは約 6mm としているので、およそ 8 要素で表現される波長の曲げ波 (6mm × 8 = 48mm) が検出されていると判断できます。1 波長が 8 要素で表現されるというバランスは経験的に順当であり、更に細かいメッシュ分割を採用すれば曲げ波は際限なく先行してしまうという可能性を、この結果は示唆しています。



曲げ応力 (横振動)

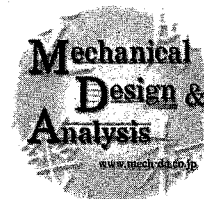


断面平均軸応力 (縦振動)

Fig. 10 ティモシェンコはり (B32) とオイラー・ベルヌーイはり (B33) の比較  
前掲「Fig. 9 衝撃点から 600mm における応力」を補足

### 参考文献

- (1) Timoshenko, S. P. 他, 谷口, 田村訳, 新版工業振動学, コロナ社, 1977.
- (2) Cowper, G. R., J. of Applied Mechanics, Vol. 33, p. 335, 1966.
- (3) 斉藤, 工業振動学, 養賢堂, 1982.
- (4) 中原ほか, 弾性学ハンドブック, 朝倉書店, 2001.
- (5) 小高, 中原, 弾性棒で衝撃された無限長はりの応力, 日本機械学会論文集, 32-248, pp. 533-541, 1967.



株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田1-40-2 アクシス調布2階  
TEL 0424-82-1539 FAX 0424-82-5106

E-mail: comm@mech-da.co.jp URL: http://www.mech-da.co.jp