

vol. 2002-4

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.  
December 2002



2003年初日・和魂宮(那須)

【特集】陰解法と陽解法によるロール圧延の解析

**FEM** Consulting Services for Engineering Practice  
URL <http://www.mech-da.co.jp>

## 【1】 陰解法・陽解法と現実の設計

今日、陰解法と陽解法による非線形ソフトウェアは、いずれも十分な信頼性と実用性を備えて市場に提供されているだけでなく、ハードウェアの低価格化という追い風を得て、普及と呼ぶに足る台数が国内には出回っています。しかしながら非線形の問題は、本来、重ね合わせができない、経路依存性がある、解の唯一性あるいは存在の保証がないといった本質的な困難を抱えています。従来の設計法は、これらの困難が露呈しないように、すなわち不確定な現象の深追いを巧妙に避けながら発達してきた経緯があるために、設計の現場には非線形解析の導入を容易には許さない土壌が既にできあがっています。

しかし一方では、製品の高度化に伴って、非線形の領域に深く踏み込んだ信頼性の保証が求められるようになってきているのも現実です。高温・高負荷の領域では材料の非線形性、軽量薄肉の材料では幾何学的な非線形性、部材界面での挙動に対しては境界条件の非線形性が問われます。解析だけではなく、実験や試作の場面でも、このような非線形性の存在は円滑さを阻害することでしょう。

多くの思想や哲学と同様に、線形性とは理想化された概念です。この200年の間、線形の理想を設計の中に実現するために、工学を背景として各種の基準や規格の類が制定されてきました。全て不確定性を削ぎ落とすための活動であったと言えます。2000年代に入り、ハード・ソフト共に非線形に立ち向かう道具がようやく整備されたにもかかわらず、焦りはややもするとこれら過去の資産を忘れさせ、あまりにも無防備に我々を非線形性に立ち向かうことに陥らせがちです。

この数年、陰解法の旗頭であったABAQUSは陽解法をそのラインアップに加え、LS-DYNAも陽・陰両解法を備えつつあります。いずれのプログラムも、米国に集約された才能と知的好奇心によってもたらされた特異な産物です。いずれ用法次第では、鬼胎ともなり得る形質を内に秘めています。故事をもって現代の夢を料簡することが必要とされています。このような観点に立ち、今回はロール圧延の古典理論を尋ねてみました。

ロールによる圧延の解析では、ロールと板材の接触面における摩擦が大きな役割を持ちます。弊社では、1996年のニュースレター<sup>(1)</sup>でMARCのCONTACT機能を用いた解析例を紹介しましたが、その後、接触解析の機能が各種のプログラムで向上してきた事情を踏まえ、ABAQUS、MSC. Marc、LS-DYNAの3種のソルバーを用いて同一の問題を解析してみました。接触面におけるロールと材料の相対速度を評価し、古典的な理論によって与えられている速度の中立点、および接触面圧の分布が表現できることを確認した例題です。

## 【2】 圧延の基礎理論<sup>(2), (3)</sup>

古典理論では、帯板の冷間圧延を以下のような仮定に基づいて検討します。

- (1) 材料は圧延方向だけに流れて幅方向には広がらない。これは板厚と板幅の比が約0.05以下ならば許される。
- (2) 材料の横断面は圧延中も平面を保持する。この横断面は主応力面であり、その上の応力分布は一様である。  
(これは初等理論と呼ばれ、ロールと材料との接触角 $\theta_1$ が十分に小さい場合を想定しています。)
- (3) 材料とロールとの間のクーロン摩擦係数 $\mu$ は一定である。
- (4) ロールの弾性変形は無視できる。また材料は剛塑性体であり、そのせん断の降伏応力は $k$ とする。

最初の仮定は平面ひずみの条件を表し、剛塑性の条件下では(1)式のようなミーゼスの降伏条件は(2)式のように簡単な形で表現できます。

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 2S_y^2 = 6k^2 \quad \dots (1) \quad \sigma_x - \sigma_y = 2k \quad \dots (2)$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  はそれぞれ圧延方向および厚さ方向の主応力で、 $\sigma_x > \sigma_y$  の関係があります。また $S_y$  は引張の降伏応力であり、(1)式からわかるように、ミーゼスの降伏条件の下では $S_y = \sqrt{3}k$  の関係にあります。

### 【3】 基礎式

Fig. 1に圧延のモデル図を示します。材料はロールの入り口において摩擦力によってロールにかみ込まれますが、滑りを生じて入り口近傍の材料の流れはロールの回転よりも遅れます。しかし材料の非圧縮性により、材料は出口に向かって進むにつれて次第に増速します。その途中でロールの周速と一致する点があり、それを過ぎると材料の方がロールより先進します。この点Nを中立点と呼びます。図中に示す記号は以下の通りです。

- x : ロールの出口からの距離
- h : 点xにおける材料の厚さ
- $\theta$  : 点xにおけ接触弧の法線と鉛直線とのなす角
- R : ロールの半径
- p : 点xにおけるロールと材料との間の接触圧力 (絶対値)
- $\sigma_x$  : x断面に作用する垂直応力 (横断面上で一様と仮定されている。)

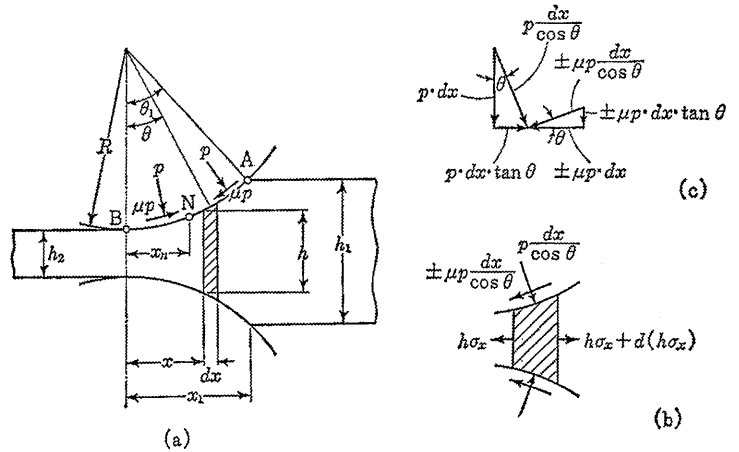


Fig. 1 ロール圧延

いま圧延方向の長さがdx、厚さがh、幅が単位長さの微小部分に作用する力の釣合いを考えます。x面に作用する力は $h\sigma_x$ 、 $x+dx$ 面では $h\sigma_x + d(h\sigma_x)$ 、ロールからの法線力は $p \cdot dx / \cos \theta$ 、摩擦力は $\pm \mu p \cdot dx / \cos \theta$ です。ただし摩擦力は中立点を境にしてその前後で方向が変わることを考慮し、複号は遅れの部分ANに対しては上側を、先進の部分NBに対しては下側をとることにします。水平方向の力の釣合いより

$$d(h\sigma_x) + 2p \cdot dx \cdot \tan \theta - (\pm 2\mu p \cdot dx) = 0 \dots (3) \quad \therefore \frac{d(h\sigma_x)}{dx} - 2p(-\tan \theta \pm \mu) = 0 \dots (4)$$

これはカルマンの方程式として知られています。次に微小部分の厚さ方向の応力 $\sigma_y$ は、接触面に作用する力の鉛直成分 $p \cdot dx (1 \pm \mu \cdot \tan \theta)$ とのつりあいから(5)式のようになります。薄板の冷間圧延の場合には接触角 $\theta_1$ および摩擦係数 $\mu$ は小さいので、1に比べて $\mu \cdot \tan \theta$ を無視することができ(6)式とおけます。更に(2)式より(7)式のようになります。

$$\sigma_y = -p(1 \pm \mu \cdot \tan \theta) \dots (5) \quad \sigma_y = -p \dots (6) \quad \sigma_y + p = 2k \dots (7)$$

また幾何学的関係より(8)式が成立するので、(7)、(8)式を(4)式に代入すれば(9)式が得られます。

$$\frac{d(h/2)}{dx} = \tan \theta \dots (8) \quad h \frac{dp}{dx} \pm 2\mu p - 4k \cdot \tan \theta = 0 \dots (9)$$

### 【4】 接触面圧の分布

薄板の場合には(10)式の近似が利用でき、更に(8)式を組み合わせると(11)式および(12)式が得られます。

$$\tan \theta \approx \sin \theta = x/R \dots (10) \quad \frac{dh}{dx} \approx 2 \frac{x}{R} \dots (11) \quad h \approx h_2 + x^2/R \dots (12)$$

これは半径Rの円弧を放物線で近似した場合に相当します。(10)、(12)式を(9)式に代入すれば、

$$\left( h_2 + \frac{x^2}{R} \right) \frac{dp}{dx} \pm 2\mu p - 4k \frac{x}{R} = 0 \dots (13)$$

ロール入口及び出口における境界条件を満足するように(13)式を解けば、接触面圧の分布が求められます。ここで帯板に作用する後方および前方の張力をそれぞれ単位横断面積あたり $\sigma_{x1}$ 、 $\sigma_{x2}$ とすれば、(13)式に対する境界条件は次のようになります。

$$\begin{aligned} x=x_1 \text{ (ロール入口) において} & \quad \sigma_x = \sigma_{x1}, \quad p = 2k - \sigma_{x1} \\ x=0 \text{ (ロール出口) において} & \quad \sigma_x = \sigma_{x2}, \quad p = 2k - \sigma_{x2} \end{aligned} \dots (14)$$

圧延前後の厚さ  $h_1, h_2$  およびロール半径  $R$  が既知のときは、接触長さ  $x_1$  は (12) 式より以下のように与えられます。

$$x_1 = \sqrt{R(h_1 - h_2)} \quad \dots (15) \quad \text{ここで} \quad \zeta = \frac{x}{\sqrt{Rh_2}} \left( \doteq \sqrt{\frac{R}{h_2}} \theta \right), \quad \eta = \frac{p}{2k}, \quad a = 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_2}} \quad \dots (16)$$

とおけば、(13) 式は (17) 式のように無次元化できます。ここで  $\zeta$ ,  $\eta$  は変数、 $a$  は定数です。さらに (18) 式とおくと、(17) 式は (19), (20) 式のようになります。

$$(1 + \zeta^2) \frac{d\eta}{d\zeta} \pm a\eta = 2\zeta \quad \dots (17) \quad \zeta = \tan \Psi, \quad d\zeta / (1 + \zeta^2) = d\Psi \quad \dots (18)$$

$$\frac{d\eta}{d\Psi} \pm a\eta = 2 \tan \Psi \quad \dots (19) \quad \therefore \eta = e^{-(\pm a\Psi)} (C + 2 \int e^{\pm a\Psi} \tan \Psi \cdot d\Psi) \quad \dots (20)$$

ただし複号は、遅れの部分 AN に対しては上側を、先進の部分 NB に対しては下側をとります。Nadai<sup>(4)</sup> は解析的に (20) 式の積分を行うために、近似的に  $\tan \Psi \doteq \Psi$  とおいて次の解を得ました。すなわち遅れの部分 AN にたいしては (21) 式、先進の部分 NB に対しては (22) 式です。

$$\eta = C_1 e^{-a\Psi} - 2(1 - a\Psi) / a^2 \quad \dots (21) \quad \eta = C_2 e^{a\Psi} - 2(1 + a\Psi) / a^2 \quad \dots (22)$$

いま (16) 式および (18) 式の無次元化を用いて上式を解くと、 $p = \eta \cdot 2k$  は遅れの部分 AN では

$$p = 2k \left\{ \left( \eta_1 + 2 \frac{1 - a\Psi_1}{a^2} \right) e^{a(\Psi_1 - \Psi)} - 2 \frac{1 - a\Psi}{a^2} \right\} \quad \dots (23)$$

先進の部分 NB では

$$p = 2k \left\{ \left( \eta_2 + \frac{2}{a^2} \right) e^{a\Psi} - 2 \frac{1 + a\Psi}{a^2} \right\} \quad \dots (24) \quad \text{ここで変数 } \Psi \text{ は (18), (16) 両式より } \Psi = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{Rh_2}} \quad \dots (25)$$

Fig. 2 は接触面圧  $p$  を以上の式を用いて計算した結果を示します。この山形の面圧分布は摩擦丘と呼ばれ、中立点 N において面圧の最大値を生ずるという重要な結果を与えます。

ここで前方あるいは後方の張力を負荷すると、接触面圧  $p$  は減少します。また中立点は後方張力を加えると前方に移動し、前方張力を加えると逆に後方に移動します。

両張力が等しいときには、張力を増すと中立点は前方へ移動することがわかります。なお図中の  $\varepsilon = (h_1 - h_2) / h_1$  は圧下率と呼ばれ、厚さの減少率を表します。

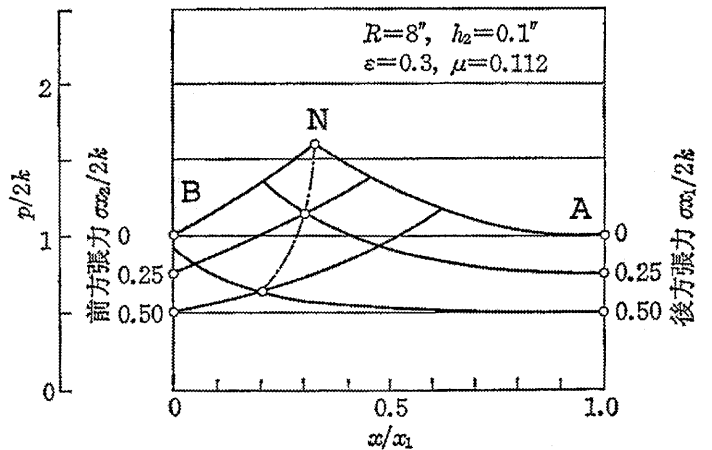


Fig. 2 接触面圧と中立点

## 【5】 FEM解析

Fig. 2 に示した理論解に対応する解析を行いました。解析条件は以下の通りです。なお理論解では規定されていませんが、ロールの周速は以下の値を用いました。また張力の影響を見るために、前方張力がある場合とない場合の2ケースを解析しました。材料定数は、理論解では剛塑性を仮定していますが、ここでは下記の弾塑性材料を想定して解析しました。

ロール半径 $R=8\text{in}=203.2\text{mm}$	ロール周速 $v=20\text{m/sec}$	材料板厚 $h_2=0.1\text{in}=2.54\text{mm}$
圧下率 $\varepsilon=0.3$	クーロン摩擦係数 $\mu=0.112$	前方張力 $\sigma_{x2}/2k=0\text{ or }0.5$
材料定数: $E=20000\text{kg/mm}^2$	$\nu=0.3$	$S_y=17.32$ ( $k=10$ ) $\text{kg/mm}^2$

Fig. 3にモデル形状を示します。材料は平面ひずみ要素を用いて肉厚の1/2をメッシュ分割しました。ローラは剛体壁でモデル化し、接触面には摩擦を効かせました。またFig. 3に示すように解析途中までは仮想のラムで材料を押込むことにより、ローラによるかみ込みを助めました。ラムの速度は、ローラの周速と同じ値を採用しました。

材料が安定にかみ込まれたのを確認した後、条件によっては前方張力を加え、定常状態に至るまで解析を進めました。Fig. 4は接触部分の拡大図です。先の(15)式により与えられる接触長さ $x_1=14.88\text{mm}$ を図中に示しています。この問題をTable 1に示す5つのケースについて解析しました。大きく分けて、Case1とCase2が完全積分、Case3からCase5が低減積分の要素を用いたケースです。

Fig. 5にCase1 ABAQUS完全積分の結果を示します。まず図(a)は板材表面の速度分布を示します。ローラの周速 $-20\text{m/sec}$ に対し、入口側は $-15\text{m/sec}$ 、出口側は $-21\text{m/sec}$ となっています。この速度分布の図で $-20\text{m/sec}$ でほぼ一定となっている領域が中立点です。次に図(b)は面圧の分布を示します。理論解では中立点で最大の面圧が発生することが指摘されており、概ね良好な結果が得られました。

図(c)は板材表面のせん断応力を面圧で除した値を示します。ローラと板が摩擦を生じながら滑る状態では、この値はクローン摩擦係数(今回は $0.112$ )に一致します。図(c)の曲線は、中立点をはさんでおよそ $-0.17$ から $+0.17$ に反転していることがわかります。これはローラの周速に対して材料の流れが中立点をはさんで正負反転し、摩擦力の方向が逆転するためです。しかしこの結果では、中立点近傍において本来の摩擦係数 $0.112$ よりもオーバーシュートするだけでなく、その前後でややばたつく結果となりました。Fig. 6はCase2 Marc完全積分の結果を示します。ABAQUSとほぼ同一の結果が得られました。

Fig. 7、Fig. 8はそれぞれABAQUSとLS-DYNAにより低減積分の要素を用いて解析した結果です。陰解法と陽解法の差があってもほぼ同一の結果となっています。また先にFig. 5とFig. 6に示した完全積分の結果と比較すると、図(c)に示す摩擦の分布はより滑らかな結果を示すことがわかります。

Table1 解析ケース

	ソルバー	要素タイプ	接触モデル	摩擦モデル
Case1	ABAQUS/Standard 6.3.1 (陰解法)	完全積分 CPE4	Lagrange 未定定数法	ペナルティ法
Case2	MSC.Marc 2003 (陰解法)	完全積分 Type11	節点拘束法	Stick-Slip
Case3	ABAQUS/Standard 6.3.1 (陰解法)	低減積分 CPE4R	Lagrange 未定定数法	ペナルティ法
Case4	LS-DYNA ver.970 (陽解法)	低減積分 ELFORM=13	ペナルティ法	ペナルティ法
Case5	Case3と同じ。但し、前方張力を負荷。			

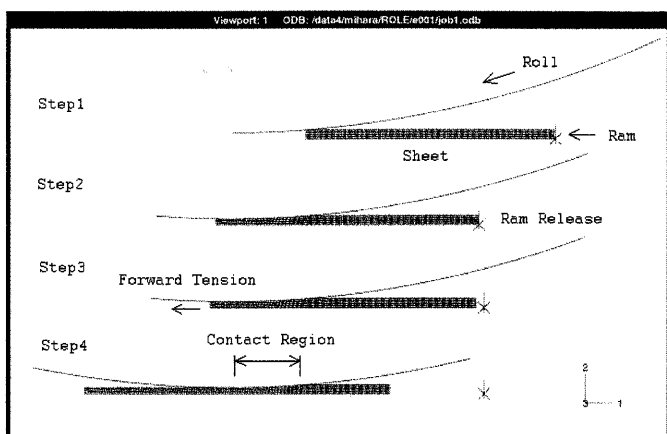


Fig. 3 解析の概要

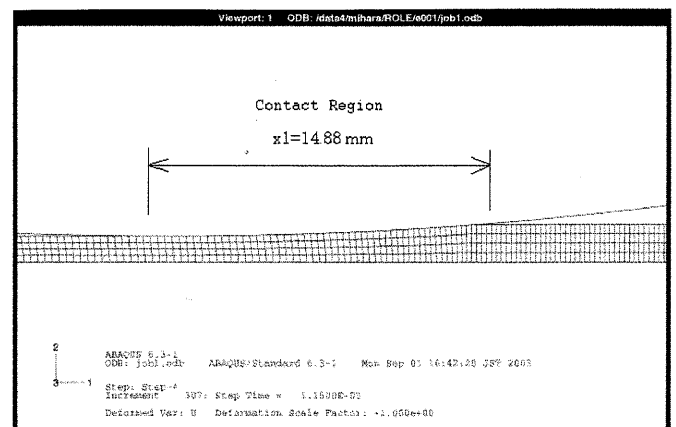
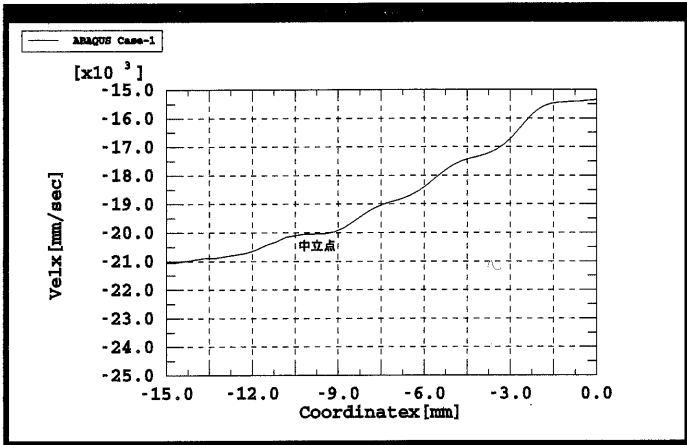
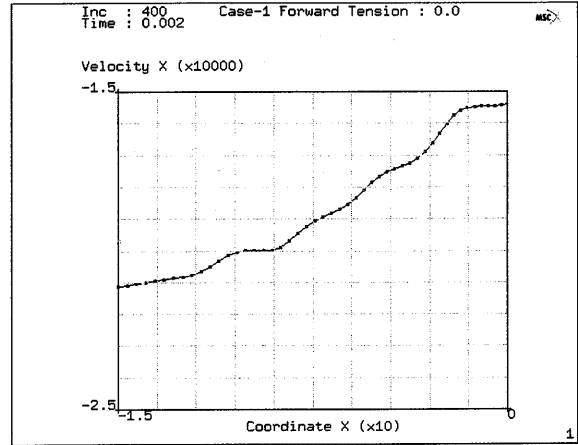


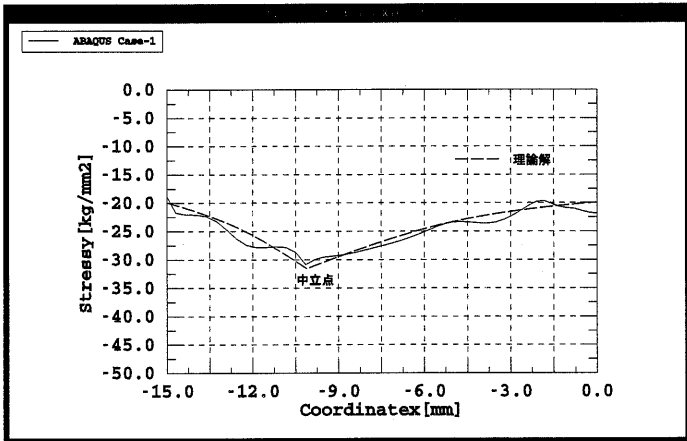
Fig. 4 接触部の近傍



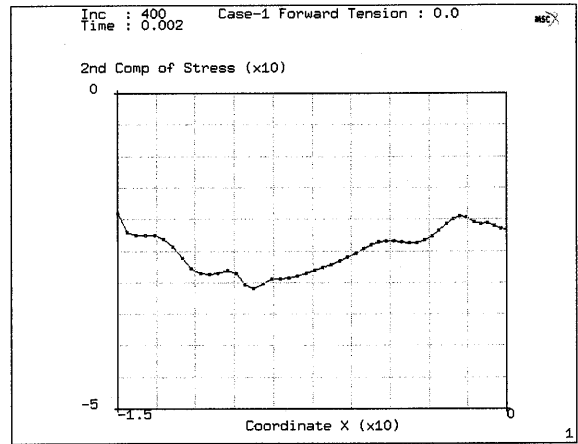
(a)速度分布



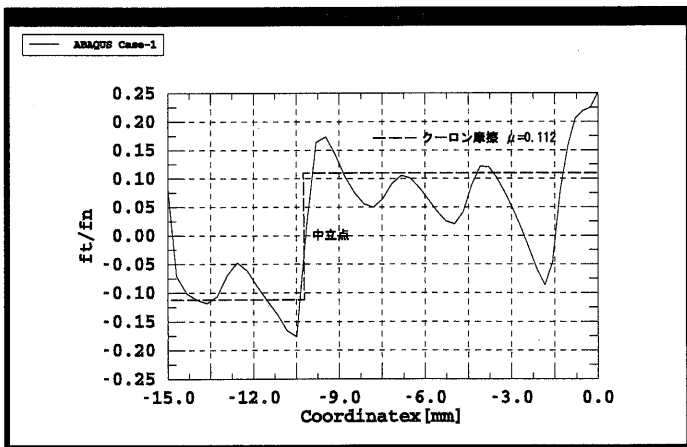
(a)速度分布



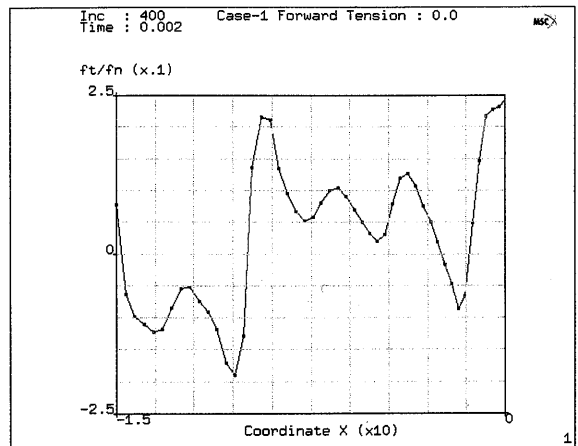
(b)面圧分布



(b)面圧分布



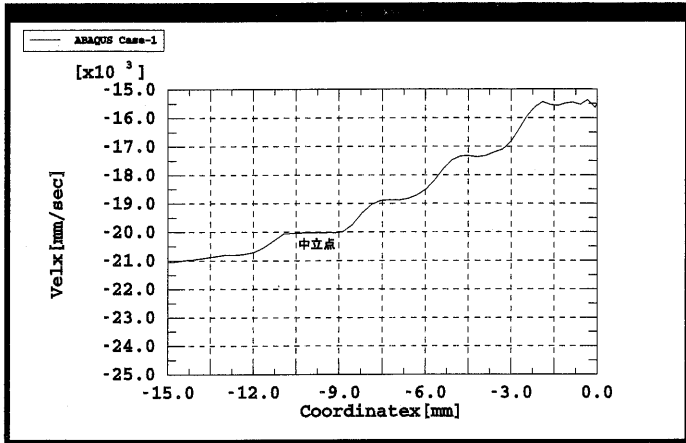
(c)摩擦分布



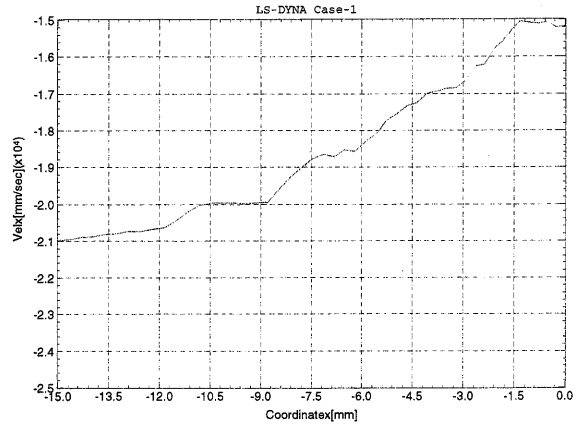
(c)摩擦分布

Fig.5 Casel ABAQUS 完全積分

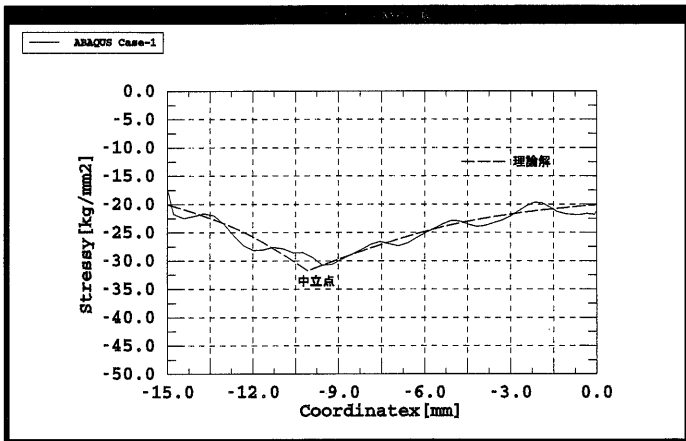
Fig.6 Case2 Marc 完全積分



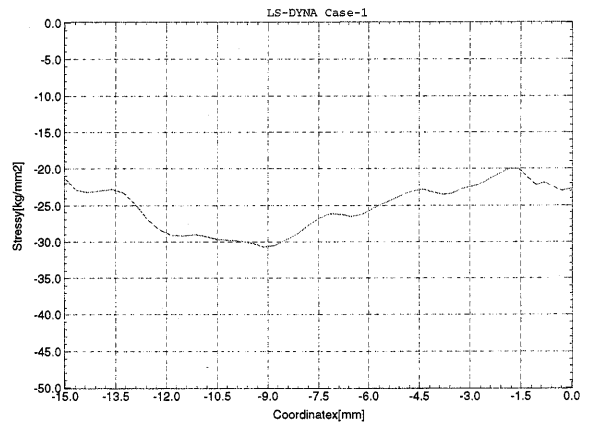
(a)速度分布



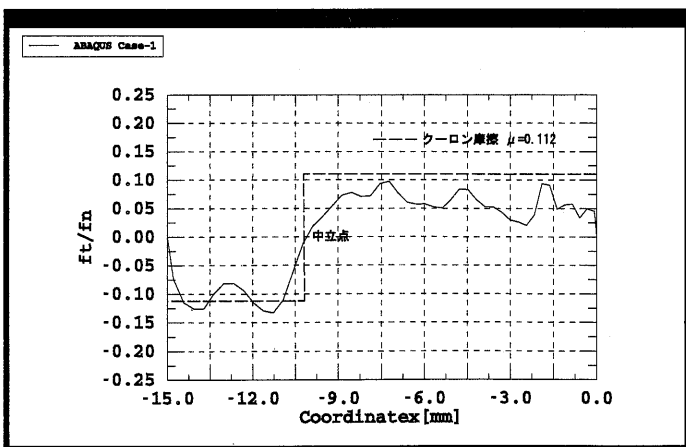
(a)速度分布



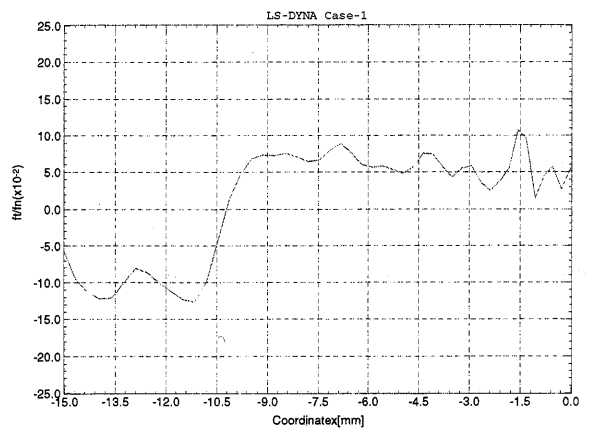
(b)面圧分布



(b)面圧分布



(c)摩擦分布



(c)摩擦分布

Fig.7 Case3 ABAQUS 低減積分

Fig.8 Case4 LS-DYNA 低減積分

今回のロール圧延の問題は上下を剛なローラではさまれ、また紙面垂直方向には平面ひずみを仮定しているために変形が許されません。そのため材料は、摩擦で拘束されつつ長手方向に変形することしか許されないこととなります。このような自由度の小さい状態で要素に軸方向応力とせん断応力が同時に与えられると、完全積分の要素は剛すぎる挙動を与えることが推測されます。その結果、摩擦力のオーバシュートに見られるような界面せん断力の振動もたらされたものと考えられます。

このような過拘束の効果は、現実の問題では引っかけ疵の発生、あるいは板の幅方向への材料の流れ込みをもたらすことを示唆しているものと考えられます。なお、完全積分および低減積分のいずれのケースにおいても、メッシュをより細分化しても結果は大きく変わりませんでした。現状、弊社としては低減積分のケースの方がより現実に近い結果を与えるものと判断しています。また最近LS-DYNAでは陽解法に加えて陰解法のアルゴリズムも機能として追加されましたが、Case4のモデルを陰解法を用いて解析しても同等の結果が得られたことを付記しておきます。

Fig.9は前方張力として $\sigma_{xz}/2k=0.5$ を与えたときの結果です。前方張力の効果によって中立点は後方に移動し、このケースも理論解と良く一致する結果となりました。

参考文献

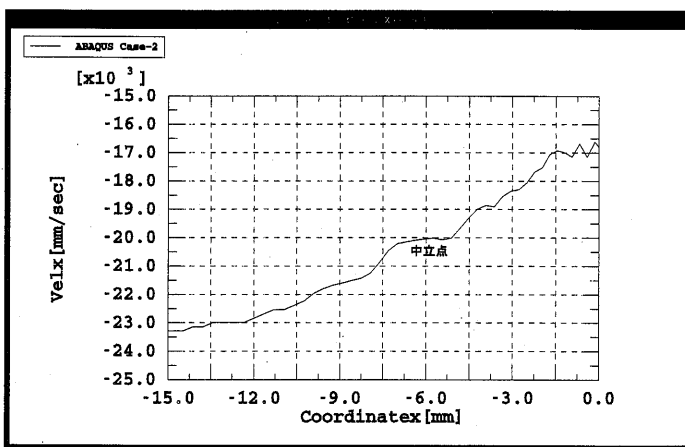
- (1) ロール圧延の解析-古典理論による検証-, Mech D&A News, vol.96-2, (株)メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス,1996.
- (2) 圧延の理論については、益田・室田, 改訂工業塑性力学, 養賢堂, 1993. を参照させて頂きました。
- (3) R.Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950.
- (4) A.Nadai, Journal of Applied Mechanics, 6, 1939.

表紙：真の道 和魂宮, 萩原真明, 2003.

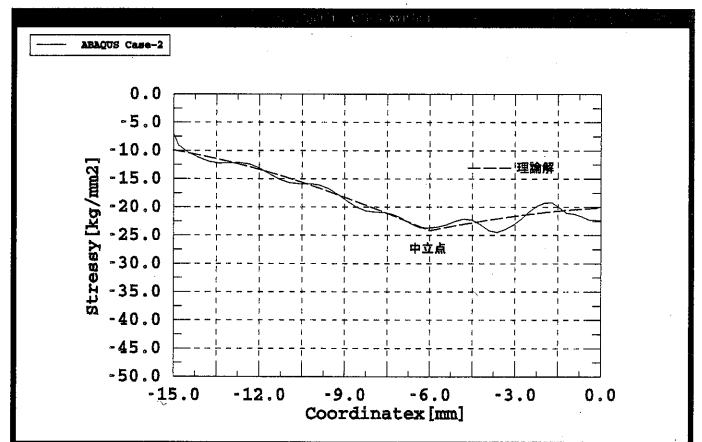
\* ABAQUSはABAQUS, Inc. 殿の製品です。

\* LS-DYNAの国内販売元は株式会社日本総合研究所殿です。

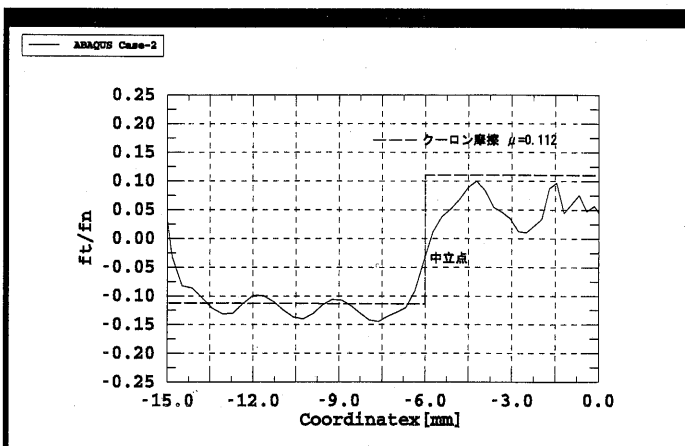
\* MSC.Marcはエムエスシーソフトウェア株式会社殿の製品です。



(a)速度分布



(b)面圧分布



(c)摩擦分布

Fig.9 Case5 前方張力がある場合 ABAQUS 低減積分

Mechanical  
Design &  
Analysis

www.mech-da.co.jp

株式会社メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田1-40-2 アクシス調布2階

TEL0242-82-1539 FAX0424-82-5106 comm@mech-da.co.jp