

vol. 2000-1

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.  
June 2000



長良川・御料鵜飼

## 【特集】 シェル構造物の非線形解析 - 平板の大たわみ問題 -

**FEM** Consulting Services for Engineering Practice  
URL <http://www.mech-da.co.jp>

## 【1】非線形構造解析の運用とシェル要素

最近の国内の製造業をとりまく情勢は厳しく、コストや人材面に大きな制約が与えられる一方で、衝撃に代表されるような極限領域での性能保証が求められる例が少なくありません。このような場面では、「非線形解析」という用語が「線形解析」と対比して用いられるために、これらが包含している対象領域の広さ、問題の質、解析上の困難さ、などに関しても、両者が同格であるかのように錯覚されがちです。すなわち線形解析が安定に解析できるのと同じように、非線形解析も可能であると誤解されることが少なくありません。

しかし、改めて言うまでもなく、非線形は線形でないものすべてを意味します<sup>(1)</sup>。従って、非線形解析が対象とすることを期待されている領域は限りなく広く、線形解析とは比べものにならない困難な問題を多く抱えています。高い水準にある汎用コードといえども、適用範囲に限界があるのは当然のことであり、思い込みにもとづく期待と現実との間の大きな隔たりは、時として企業における解析業務の命脈を断つに十分な混乱をもたらすことがあります。

有限要素法の名が世に現れたのは1950年代の後半です。現在われわれが利用している非線形問題に対する解法の大部分は、その後わずか10数年の間に確立されてしまいました。しかしこれをもって、70年代以降、我々は何をやってきたか？と考えるのは早計です。一例を挙げましょう。以下の式は1755年にダニエル・ベルヌーイが示した弦の振動の式です。長さ  $l$ 、線密度  $\rho$ 、張力  $K$  なる弦の自由振動変位  $\xi$  を、一端から測った距離  $x$  に対して表しています。

$$\xi = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{l} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) \quad \text{ここで} \quad \omega_m = \frac{m\pi}{l} \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

この問題は、弦の張力によって初期応力マトリックスが作用する幾何学的非線形問題であり、上式は厳密解を与えます。しかしこれを三角関数を用いた整然とした式であると見るのは現代の我々の勝手な解釈であって、本来の姿は計算の意欲を失わせるような無限べき級数です。これに  $\sin$  という仮の名前を与えて外見を装ったにすぎません。三角関数の数表がなければ、この式は何の工学的な解決を与えることもできないのです。これらの数表を作成する試みは、1930年頃ようやく列国の国家事業として開始されるに至ります<sup>(2)</sup>。第1次大戦が終結し10年を経過した時期であることを考えれば、その後の有限要素法の実用化にも歴史が深く関与していることに思いが及びます。

70年代前半から30年を経て、我々はようやく非線形構造解析を現実的に運用するに足る計算機の手に入れたと考えられます。シェル構造物などは、その最も大きな恩恵を受ける代表的な例<sup>(3)</sup>でしょう。弊社では、理論解のある各種の問題に汎用プログラムを適用し、検証例を重ねることをもって、このような時代の流れに貢献したいと考えております。皆様のご理解をいただければ幸いです。尚、本稿の作成にあたっては、吉田裕先生の御知見<sup>(1)</sup>、および参考文献(4)～(6)を広く参照させて頂きました。

## 【2】平板の微小たわみに関する仮定

2次元的な広がりを持つ薄い板で、その中央面(板の両表面から等距離にある面)が平面であるものを平板と呼びます。ラグランジェ、キルヒホッフ、ポアソンらによって展開された古典的な平板の微小たわみ理論は、次の仮定に基づいています。

- (1) 平板の垂直断面は、変形後も中央面に対して垂直な平面を保つ。
- (2) たわみは平板の厚みに比べ小さく、中央面の傾斜角(rad)の2乗は1に比べて微小である。
- (3) 中央面の伸縮はない。たわみ曲面が円筒のようなものであれば、幾何学的に見て中央面の伸縮はなく、平面に展開できる。これを可展面と呼ぶ。一方、一般のたわみ曲面は非可展面であるので、曲げにより中央面の伸縮を生ずるが、これを微小として無視する。
- (4) 曲げ変形を受ける際、面外の法線方向応力を生じうるが、面内方向の応力に比べて微小として無視する。
- (5) (3)(4)の仮定より、中央面における接線方向の直応力の成分は、変形にかかわらず0である。すなわち、中央面は常に中立面(曲げ応力が0である面)である。
- (6) 中央面に垂直方向のせん断応力によって、断面にはせん断変形を生じるので、厳密には(1)の仮定が損われる。しかし、板厚が小さい場合にはこれを微小として無視する。

### 【3】平板の微小たわみ理論

#### 3.1 応力 - ひずみ関係式

Fig.1に示すような厚さ $h$ の平板の一断面 $abcd$ が $Z$ 方向のたわみ $w$ を受け、 $a'b'c'd'$ に変形する問題を考えましょう。先の仮定との関連で考えると、

- ・ 仮定(1)より変形後の断面 $a'b'$ は直線であり、 $O_1'$ において曲線 $O_1'O_2'$ に垂直である。
- ・ 仮定(3)より中央面は伸縮せず $O_1O_2 = dx = O_1'O_2'$ である。

これらにより、 $dx$ を微小にとったときにできる扇形 $O_1'O_1''O_2''$ は扇形 $O_1O_1''O_2''$ と相似になります。ただし、弧 $O_1''O_2''$ は変形前の中央面から下方に $z$ の距離にあった中央面の長さだけ伸びていることがわかります。この伸びを $du$ とします。ここで、曲率半径 $\rho_x$ を考えれば $dx/\rho_x = du/z$ 、したがって、 $O_1''$ 点における $x$ 方向の直ひずみは以下のようにになります。また $y$ 軸方向についても同様です。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{\rho_x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{z}{\rho_y} \quad \dots\dots (1)$$

ここで、たわみが微小であれば、曲率半径の定義においても $(w/x)^2$ および $(w/y)^2$ を無視できるので、

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \dots\dots (2)$$

(2)式を(1)式に代入します。またせん断応力の定義も加えると、ひずみと変位の関係は以下のようにになります。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots (3)$$

仮定(4)より、中央面に垂直方向の応力分布を無視すると、弾性体に関するHookeの法則は、このような2次元の場合については次のようになります。

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad \dots\dots (4)$$

(3)式と(4)式から、(5)式が求まります。(5)式より、いずれの応力も、中央面からの距離 $z$ に比例する直線的な応力分布が得られることがわかります。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots (5)$$

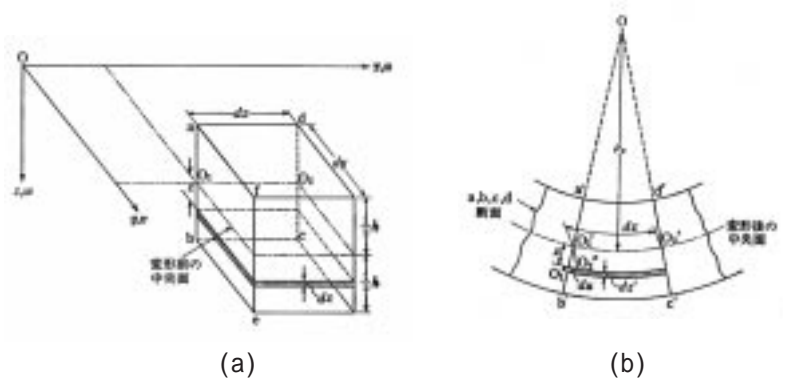


Fig.1 平板の微小たわみ

#### 3.2 モーメントとせん断力

応力が直線的な分布をもつことを利用すると、断面に作用する曲げモーメントは以下のように簡単に求まります。単位長さあたりの曲げモーメントおよびねじりモーメントの成分を、それぞれ $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$ および $M_{yx}$ として、Fig.2に図示の方向を正、板厚を $h$ としています。また、 $D$ は平板の曲げ剛性とよばれる定数です。

$$M_y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z \sigma_y dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z \sigma_x dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots (6)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z \tau_{xy} dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{ただし、} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

なお、x軸およびy軸に垂直な断面に働く、単位長さに対する垂直方向のせん断力を、Fig.2(a)に示す方向を正として次のように定義します。

$$Q_x = \int_{-h}^{h} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-h}^{h} \tau_{yz} dz \quad \dots\dots (7)$$

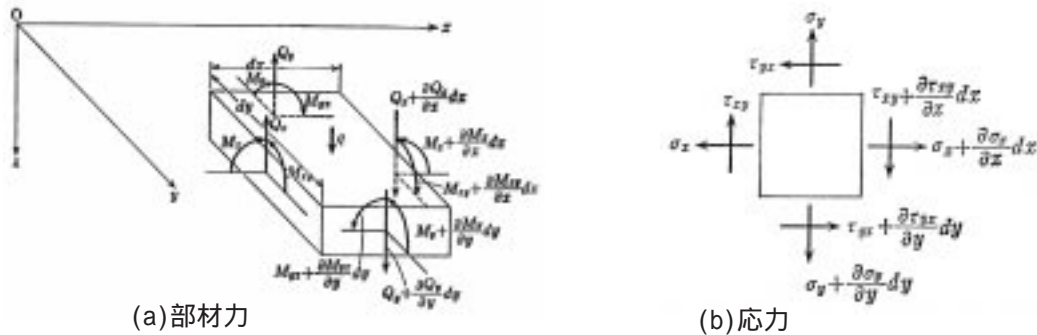


Fig.2 部材力の定義とつり合い

### 3.3 部材力のつり合い

次に、Fig.2(a)に示すような直線 x, x+dx, yおよび y+dyによって区切られた平板の微小矩形要素の平衡条件について考えましょう。qを板の面の単位面積あたりの荷重とし、z方向に働く場合を正とすると、この微小矩形要素に働く荷重は qdxdyとなり、これらは、四辺の断面に働く垂直方向のせん断力とつり合わなければなりません。単位長さあたりの垂直方向のせん断力を Qxおよび Qyとすると、Fig.2(a)により、z方向の部材力のつり合いは、

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad \dots\dots (8)$$

次にモーメントのつり合いを考えるとx軸について

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dy dx = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad \dots\dots (9)$$

同様にy軸について  $\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$

(9)式に(6)式を代入すると以下の関係が求まります。

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots (10)$$

また(9)式を(8)式に代入し、 $M_{xy} = -M_{yx}$ となることに注意すれば、次式を得ます。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad \dots\dots (11)$$

更に(6)式を代入すれば、次式がえられます。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} = q \quad \dots\dots (12)$$

曲げ剛性Dが平板の各断面において一定、すなわち一様な厚さで弾性定数が一定の場合は、平板の曲げの基礎微分方程式として次式がえられます。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \dots\dots (13)$$

## 【4】平板の大たわみ理論

### 4.1 適合条件式と応力関数

平板の曲げの基礎方程式(13)を導くにあたっては、中央面の伸縮を無視できるという仮定を利用しました。この仮定は、平板の表面に垂直荷重がかかったとき、その荷重が板の断面に働くせん断力のみで支持されることを意味しています。これは板厚が比較的厚く、たわみが板厚 $h$ に比べて小さい場合には、ほぼ成り立つものと考えて構いません。

しかし板厚が薄く、たわみが板厚と同程度またはそれ以上大きくなるような場合は、一般にFig.3に示すように、たわみ曲面の傾斜角(rad)も1に比べて無視できなくなります。この結果、中央面において発生している応力が傾いた曲面内で働くと考え、それらの垂直方向成分の影響を平衡条件式のなかで無視できなくなります。

いま中央面内において板の断面の単位長さあたりに働く、直応力およびせん断応力を、それぞれ  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  および  $\tau_{yx}^0$  とします。また部材力を以下のように考えます。

$$N_x = h \sigma_x^0 \quad N_y = h \sigma_y^0 \quad N_{xy} = N_{yx} = h \tau_{xy}^0 = h \tau_{yx}^0 \quad \dots\dots (14)$$

これらのあいだの釣合いの方程式は、正確には傾斜した中央面について考えるべきですが、近似的に、これらの応力成分を $xy$ 平面方向の応力とみなして、 $xy$ 面内の微小矩形要素の平衡方程式を作れば下のようになります。これはFig.3において、微小矩形要素が回転しない条件です。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (15)$$

中央面の $x$ および $y$ 軸に関するひずみ成分をそれぞれ  $\epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y^0$ , および  $\gamma_{xy}^0$  と書き、変位 $u, v$ については1次の項まで、たわみ $w$ の微係数については2次の項までとって、これらの中央面における値 $u_0, v_0$ および $w$ の微係数により表すと、それぞれ下のようになります。

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots\dots (16)$$

この式の導出は、有限変位を考慮した連続体の変形論によります。すなわちFig.3に示すたわんだ曲面に沿った微小長さを $ds_x$ とすると

$$ds_x = \sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} dx \cong \left[ 1 + \frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2 \right] dx \quad \dots\dots (17)$$

従って、 $ds_x$ として近似的に $xy$ 平面内のひずみのほかに、たわみによるひずみの増加量 $1/2(\partial w / \partial x)^2$ を考慮することになります。せん断ひずみ成分についても同様ですが、その詳細は、例えば、ティモシェンコの著作<sup>(6)</sup>(下巻, p.320)を参照下さい。これらのひずみがいずれも $x, y$ の連続関数であって、 $x$ および $y$ に関する偏微分の順序を交換しても値が変わらないことを用いると、面内ひずみ成分に関する適合条件として次式が与えられます。

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \dots\dots (18)$$

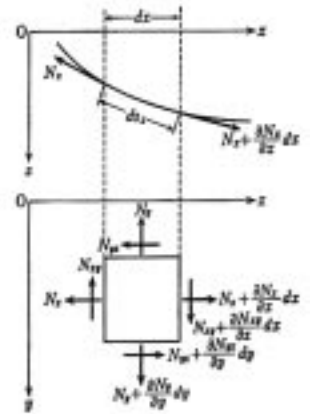


Fig.3 平板の大たわみ

次に応力関数 $F$ を導入します。 $F$ として(19)式のようなものを考えれば、(15)式は常に満足されます。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots (19)$$

ここで Hooke の法則より

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \quad \epsilon_y^0 = \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{1}{hG} N_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots (20)$$

(20)式を適合の条件式(18)に代入すると次式が得られます。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad \dots\dots (21)$$

## 4.2 部材力のつり合い

次に、Fig.4に示す微小矩形要素のz方向の力の釣合い条件を考えましょう。板がたわんだ状態において、中央面に働く断面力は $N_x$ 、 $N_y$ および $N_{xy}$ を用いて近似されるものとします。ただし、これらはx y 面内における平衡条件(15)式を満足するものとし、近似的にそのような面内力の成分、すなわち $N_x$ 、 $N_y$ および $N_{xy}$ が、たわんだ中央面に沿った方向に働くものとします。このように仮定すると、平板のy=一定の断面内における曲げによって、垂直断面力 $N_x$ はz軸方向に次の大きさの成分を生じます。

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \quad \text{高次の微小量を無視して} \quad N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad \dots\dots (22)$$

同様に $N_y$ のz軸方向の成分は  $N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy$

次に、せん断力 $N_{xy}$ のz軸方向の成分を考えましょう。Fig.4に示すような中央面上の要素  $dx dy$  のたわみを考え、同図に示す角 $\partial w / \partial y$ および角 $\partial w / \partial y + (\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ のために、せん断力 $N_{xy}$ はz軸方向に次の大きさの成分を生じます。

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad \dots\dots (23)$$

せん断力 $N_{yx}=N_{xy}$ のz軸方向の成分も、同様な式で表すことができるので、結局、全せん断力のz軸方向の成分は、次のようになります。

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad \dots\dots (24)$$

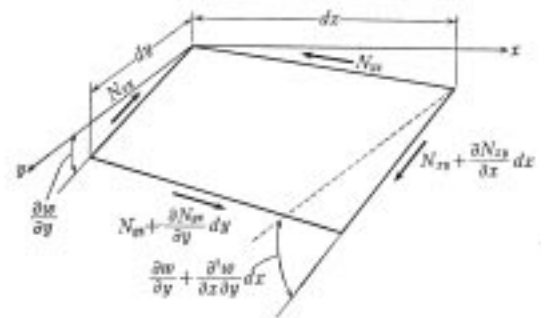


Fig.4 大たわみ状態でのせん断力

(22)式、(24)式およびこの微小要素に働く垂直荷重 $q dx dy$ を加えたものを(8)式の $q$ と置き換えて、(9)式を用いれば、(11)式の代りにつぎのz方向の平衡方程式が得られます。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots (25)$$

上式に、(6)式で与えられる $M_x$ 、 $M_y$ および $M_{xy}$ の値を代入すれば、次式となります。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots (26)$$

(26)式を(21)式の適合の条件式と連立して解けば、仮定(2)の制限を越える大たわみ問題、すなわち、たわみ量が板厚を上回る問題についての解が得られます。この2つの方程式をKarmanの方程式といい、たわみのx,yに関する2次微係数の2乗の項まで考慮した、平板の大たわみ曲げの基礎方程式として知られています。

## 【5】長方形板の大たわみ解析 (FEM)

Fig.5に周辺固定の正方形板に対して得られた初期の研究の結果を示します<sup>(4)</sup>。解析の条件は、以下の通りです。

一辺の長さ : 16in      板厚 : 0.1in      E=30 × 10<sup>6</sup>psi      = 0.316

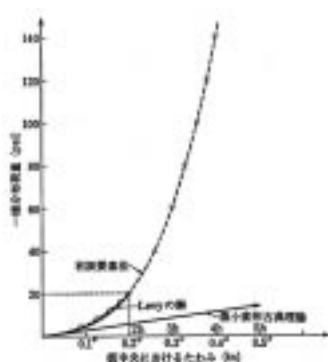


Fig.5 等分布荷重を受ける周辺固定の正方形板のたわみ

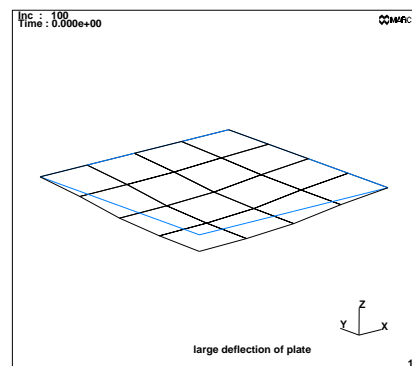
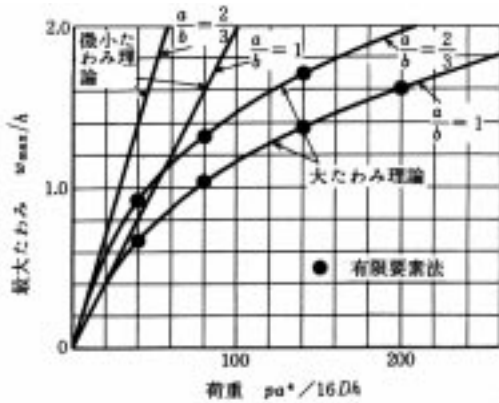


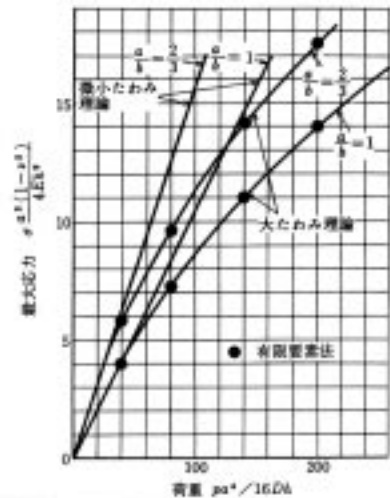
Fig.6 FEM 解析モデル

図中、Levyの解とはKarmanの方程式にエネルギー原理を適用して、解析的近似解を求めたものです。たわみが小さいときは微小変形の理論と一致しますが、たわみの増大と共に中央面内の応力(膜応力)の影響が現れ、著しく剛くなることがわかります。Fig.6にMARC\*による解析モデルを示します。大変形解析のオプションを使用すると、Fig.5の破線に示すような結果が得られます。弊社の実績では、実測値とも良い一致を示すことが多いようです。

Fig.7はより広範な条件に対して、変位と応力の理論解<sup>(5)(7)</sup>と比較した結果です。FEMの結果は実用的に十分な精度を有していることが確認できました。



(a) 最大たわみ



(b) 最大応力

Fig.7 等分布荷重を受ける周辺固定の長方形板のたわみ

## 【6】長方形膜の固有振動解析 (FEM)

次に膜応力が卓越した問題の例として、長方形膜の固有振動を解析してみましょう。この膜の振動は音響工学の分野で実用的な意味を持つだけでなく、複雑な構造に対して近似解を与えるRayleigh-Ritz法の基礎的な例として引用される問題です<sup>(8)(9)</sup>。問題の概要は以下の通りです。

- ・膜は長方形で様な厚さを持ち、完全に曲がりやすい(しなやかな)薄い板である。
- ・膜の周囲には、辺の単位長さあたりに様な張力が与えられている。振動中のたわみによる張力の変化は無視できる。

ここで次の記号を使用します。

- $a, b$  : 辺の長さ [mm]
- $S$  : 膜の周囲に与えられる単位長さあたりの様な張力 [kg/mm]
- $v$  : 膜の任意の点の  $xy$  平面に垂直な変位 [mm]
- $w$  : 単位面積あたりの膜の重量 [kg/mm<sup>2</sup>]

まず、たわみによる膜のポテンシャルエネルギーの増加は、様な張力  $S$  に膜の表面積の増加を掛けて得られます。たわんだ状態の膜の表面積は

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad \text{微小たわみでは} \quad A \approx \iint \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \quad \dots (27)$$

したがって、ポテンシャルエネルギーの増加は(28)式のようにになります。一方、振動中の膜の運動エネルギーは(29)式で表されます。

$$\Delta U \approx \frac{S}{2} \iint \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \quad \dots (28) \quad T = \frac{w}{2g} \iint v^2 dx dy \quad \dots (29)$$

Rayleigh-Ritz法では、振動している膜のたわみを級数で近似し、(28)式と(29)式を等置した状態で極小の振動数を探すという手順を取ります。

一方、この問題は形状が簡単であるので厳密解も与えられており、結果だけを示すと(30)式のようにになります<sup>(10)</sup>。ここで、Fig.8は正方形膜について対応するモード形状を示します。

$$\text{固有振動数} \quad f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \text{ [Hz]} \quad \text{ただし } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (30)$$

FEMでこれを解析するには、まずモデルに所定の張力を与えた状態で静定させ、剛性マトリックスに初期応力の効果を反映させます。この結果、しなやかな膜は面外変形に対する剛性を有することになります。この状態で固有値解析を実行すれば、(30)式に対応する解が得られます。

MARCでは膜要素も用意されているので、曲げ剛性のないしなやかなモデルを作ることができます。また、通常のシェル要素を用いる場合は、肉厚を薄くするなどして曲げの効果を排除すれば、膜要素の解に一致するようになります。なお、MARCの厚肉シェル要素(#75)は、かなり薄い状態で使用しても、シアロックの不具合は生じないように配慮されています。解析結果を以下に示します。理論解に一致する結果が得られました。

解析条件  $a = b = 1[mm]$   $t = 0.001[mm]$   $w/gt = 1 \times 10^{-10}[kg \ sec/mm^4]$  (単位体積あたり密度)  
 $E = 1[kg/mm^2]$   $= 0$   $S/t = 1[kg/mm^2]$  (張力による初期応力)

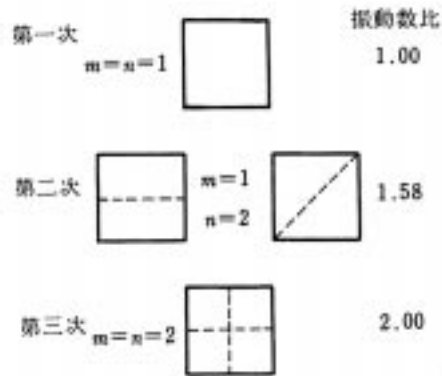


Fig.8 正方形膜の固有振動モード (破線は節線を示す)

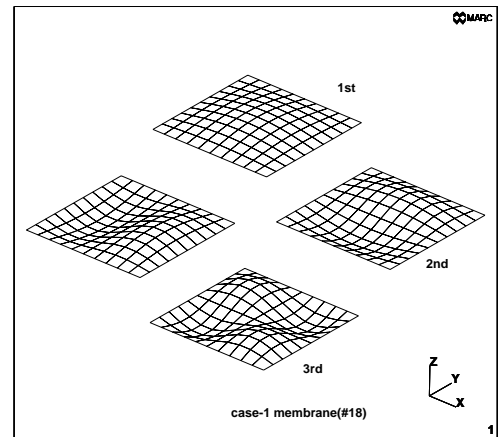


Fig.9 固有振動モード解析結果

Table 1 固有振動数

次数	理論解 [10 <sup>4</sup> Hz]	FEM 解析 [10 <sup>4</sup> Hz]	
		膜要素 (#18)	厚肉シェル要素 (#75)
1次 (m=1, n=1)	7.07	7.10	7.10
2次 (m=1, n=2)	11.2	11.3	11.3
3次 (m=2, n=2)	1.41	1.44	1.44

参考文献

- (1)吉田, 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, 374,p.25,1986.
- (2)早坂, 音の歴史, 電子情報通信学会, コロナ社,1989.
- (3)例えば、鋼製橋脚の弾塑性有限変位 FEM 解析マニュアル, (社)日本橋梁建設協会,1998.
- (4)栖原, 平板の曲げ理論, 培風館,1972.
- (5)ティモシェンコ他, 板とシェルの理論 (上・下), プレイン図書出版,1973.
- (6)ティモシェンコ他, 弾性安定の理論 (上・下), プレイン図書出版,1974.
- (7)機械工学便覧, 日本機械学会, A4-63, 1984.
- (8)ティモシェンコ他, 新版工業振動学, コロナ社, 1977.
- (9)カルマン他, 工学における数学的方法, 下, 法政大学出版局,1954.
- (10)機械工学便覧, 日本機械学会, A3-51, 1984.

表紙:長良川・御料鶉飼,7月,大橋弘,(社)時事画報社 フォトライブラリ

\*MARC/MENTATは日本エムエスシー株式会社製品の製品です。

株式会社メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス

〒182-0024 東京都調布市布田1-40-2 アクシス調布2階

TEL 0424-82-1539

FAX 0424-82-5106

www.mech-da.co.jp

comm@mech-da.co.jp