

vol.97-4

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

December 1997



岩手 錦秋湖

【特集】流体連成振動解析 Flow-induced Vibration

FEM Consulting Services for Engineering Practice
URL <http://www.mech-da.co.jp>

Vol.97-4 【特集】流体連成振動解析

1. はじめに

近年、流体解析ソフトウェアの発達に伴い、流体反力を考慮した構造物の振動解析が、実用に近づいてきました。しかしながら、流体はその粘性と圧縮性のために、現象の記述が著しく煩雑です。一方、構造物単体の振動解析は、その非線形性を考慮したとしても、その取扱いははるかに容易であり、実用面でも様々な試みが成功を収めてきました。特徴も難易度も大きく異なるこれら2つの分野の解析を結びつけるには、慎重に検討を進める必要があります。今回は、まず既存の技術でどこまで解析が可能であるか検討した結果を紹介します。

2. 振動物体に働く流体反力

先年、日本機械学会会長を務められた大橋秀雄先生の著作¹⁾の中に、流体と構造物の相関を解説されたものがあります。やや古い資料ですが、指摘されている課題は現在でも耳に新しいので、以下に引用させていただきます。

『水や空気のような流体中に置かれている構造物が振動するとき、それにつられて周囲の流体も振動し、構造物側に特定の力を及ぼす。これが流体反力である。流体反力は振動物体まわりの流れによって定まり、それを求めることはまさしく非定常流体力学の問題である。構造物の振動解析を行うに当たって、振動技術者は流体反力に適切な仮定を置かなければならない。この問題に対して振動技術者が流体の専門家に助言を求めたとしても、ほとんどの場合失望をおぼえるばかりであろう。流体屋が自信をもって答えることができるのは、実際とはほど遠い極めて単純なケースに限定されるからである。このような事情のもと、振動技術者は流体反力をブラックボックス的に取扱い、減衰係数のような振動論的パラメータを導入して、現象に適合するようなその値を選定する方法で処理せざるを得なかった。今後振動解析の精密化に伴い、流体反力をなるべく"なま"の形で予測することがますます必要となり、これに対する流体技術者の責任は重い。

流体反力を考えるに当たり、周囲流体を強制的に対流させるか否かで事情が変わる。対流させない、すなわち静止流体の場合は、流体は振動物体から流動エネルギーを得てこれを摩擦損失あるいは放射損失として消散するのみであるから、流体の存在は振動に対して必ずダンピングとして作用する。従って、流体反力の正確な予測は、振動に対する減衰作用の見積りに寄与する。一方、周囲流体を強制的に対流させるとき、換言すれば流れの中に振動物体が置かれているときは、流体を駆動するエネルギーの一部が流体反力を介して振動物体に与えられることも起こり得る。この場合、物体は自励振動を起こす可能性がある。このように流れがある場合は、流体力が増幅的に働くか減衰的に働くかをまず判断しなければならない。振動の形態が千差万別であるのに対応して、流体力にもさまざまなケースがある。本解説では、静止流体中で振動する物体に対する流体反力のうち、知られている代表的なケースを取上げて紹介する。流れがある場合は、たとえば翼のフラッタの研究のように独自の分野を形成しているものもあるので、それぞれの文献を参照されたい。

もし流体が粘性も圧縮性も持たない理想流体であれば、振動物体に働く流体力は慣性反力のみとなり、エネルギー的には中立で減衰や増幅とは無縁な力となる。またその大きさを求めることは、計算の難易の差こそあれ、原理的にはすべて可能である。流体反力を複雑なものとする原因は、流体の粘性と圧縮性にある。したがって、流体反力の実例を示すに当たって、3章では非圧縮性流体を対象に粘性の影響のみを示し、4章では非粘性流体を対象に圧縮性の影響のみを示すことにする。その両者を総合した例については、現在ほとんど知られていない。』

3. 理想流体による反力

コップをたたいて音を立てる場合、空の時と水を満たした時ではその音色が異なります。水を満たしたコップは、水の質量を背負って振動するので、固有値が下がり、低い音色となるからです。最近の流体連成解析は、何らかの条件下でナビア・ストークス式を解き、それを構造系の解析と結びつけることに主眼がおかれています。実用性から見た場合、いわゆる時刻歴応答を知る以前に、音色と称される固有振動モードが得られれば十分である例が少なくありません。

2. の解説の中で、理想流体の仮定に基づく慣性反力の効果とはこのあたりの機微を指し、例えば上記のようなコップの音色の問題はきれいに片をつけることが可能です。理想流体による反力の検討は、1930年代のLamb²⁾の研究にまで溯りますが、今井功先生の著作³⁾の中に、円柱を想定した解が掲げられているので、これを引用します。また、日野幹雄先生の著作⁴⁾の中には、同様に実現象に則した解説があるので参照下さい。

3.1 理想流体の方程式

粘性によるせん断応力の効果がなく、垂直応力だけが作用するような仮想的な流体を理想流体と呼びます。水や空気のように粘性の小さい流れでは、理想流体の渦無し(微視的な流体要素が剛体回転していない)運動が、実際の現象をよく表現できると期待されます。このような流れでは速度ベクトル v は速度ポテンシャル ϕ を用いて(1)式、また運動方程式は一般に(2)式ようになります。

$$v = \text{grad} \Phi \dots \dots (1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = (Ft) \dots \dots (2)$$

一方、連続の式は (3) あり、特に非圧縮性の場合 $\rho = \text{const}$ であるので (4) 式のように簡単化されます。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}) = 0 \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots (4)$$

(4) 式はラプラス (Laplace) の方程式と呼ばれます。ここで注意すべきことは、(4) 式には時間 t があらわに含まれていないことです。従って、非定常な流れを取扱う場合でも、時間は単にパラメータとして含まれるだけであって、各瞬間ごとに境界条件から流れが定まります。つまり過去の歴史は流れの場になんら影響を与えません。一方、圧縮性の流体では、流れの中の 1 点に生じた状態変化は音波として四方に伝わり、後の時刻における流れの場に影響します。非圧縮性流体の場合には、いわば音波の速度が無限に大きくて、1 点での状態変化は瞬間的に流れの各点に伝わると考えられるのです。ラプラスの方程式を適当な境界条件で解いて速度ポテンシャル Φ を定めると、(1) 式によって速度が定まり、さらに (2) 式から

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 \right\} \dots \dots (5)$$

によって圧力 p を求めることができます。このように、非圧縮の流体の場合には、 Φ 、 p に対する連立微分方程式は完全に分離されて、単に Φ に対するラプラスの方程式を解けばよいことになります。

(5) 式は圧力方程式と呼ばれます。前述のように非圧縮性流体の渦無し運動は、定常、非定常を問わず、同じ形の速度ポテンシャル Φ で表されます。ただ式中に現れる定数が時間 t とともに変化すると考えればよいのです。しかし、圧力方程式 (5) には $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$ 項が含まれるので、圧力、従って物体に働く力は定常流と非定常流とで違ってきます。これを以下に示しましょう。

3.2 定常流による反力 (圧力抵抗および揚力)

Fig. 1-2 に示すような環境を伴って円柱のまわりを流れる理想流体の複素速度ポテンシャル $f = U + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log z$ は $z = x + iy$ について (6) 式のように表されます。

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z \dots \dots (6) \quad U: \text{円柱から遠い位置での一様流速}$$

Γ : 時計方向に測った循環 a : 円柱の半径

ここで循環とは、閉じた曲線 (この場合は円柱の表面) に沿って接線方向の速度を積分した量を示します。すなわち Fig. 1-2 は概念的には一様流中で反時計まわりに円柱を回転させ、時計まわりの相対速度を発生させた状態に相当します。

循環の無い場合には円柱の上下で流れは対称ですが、時計方向の循環がつけ加わると、上側では流速ははやく下側では遅くなります。従ってベルヌーイの定理によれば、上側では圧力は下がり、下側では高まるので、円柱は上向きの力を受けるでしょう。野球の変化球は、この性質によるものです。この力を計算するには、まず円柱表面で $z = ae^{i\theta}$ とおいて、速度 (7) 式を求め、次にベルヌーイの定理から圧力 (8) 式を求めます。

$$q = v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \dots \dots (7) \quad p = p_0 - \frac{\rho}{2} q^2 = p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \dots \dots (8)$$

一般に、流れの中におかれた物体は、その表面の長さ ds の部分に $-p \mathbf{n} ds$ なる圧力を受けます。 \mathbf{n} は法線方向の単位ベクトルです。したがって表面全体にわたって積分すれば、圧力の合力として物体には

$$\mathbf{P} = - \oint p \mathbf{n} ds \dots \dots (9)$$

なる力が働きます。この力の、流れに平行および垂直な成分をそれぞれ抵抗 (drag) および揚力 (lift) と名付けます。円柱では $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $ds = a d\theta$ とおけばよいので、

$$P_x = - \int_0^{2\pi} a \left\{ p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right\} \cos \theta d\theta = 0 \dots \dots (10)$$

$$P_y = - \int_0^{2\pi} a \left\{ p_0 - \frac{\rho}{2} U^2 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right\} \sin \theta d\theta = \rho U \Gamma$$

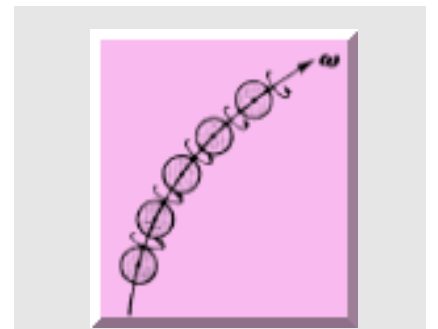


Fig. 1-1 渦のある流れ ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$)

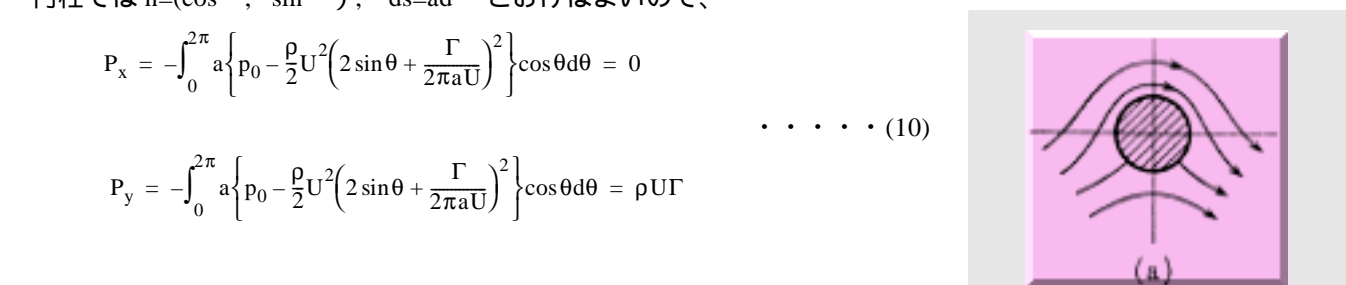


Fig. 1-2 環境を伴う流れ

すなわち、円柱には抵抗が働かず、 U なる揚力を受けるだけとなります。円柱にかぎらず、任意の物体が理想流体の様な流れの中におかれているとき、物体には抵抗が働かないというこの非現実的な解を、ダランベール (d'Alembert) のパラドックスと言います。また、一様流速を U 、物体のまわりの循環をとすれば、物体には U なる揚力が働きます。これをクッタ・ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理と言います。

ダランベールのパラドックスは、明らかに粘性を無視した扱いに起因しています。粘性を無視したところによる影響は二重にあります。一つは円柱表面でのせん断応力を生じないこと、また二つめはより重要ですが、粘性の作用のため流れが円柱表面からはく離し、流れの状況、すなわち円柱まわりの圧力分布が一変してしまうことです。今回は、この問題についてこれ以上は触れません。

3.3 非定常流による反力 (付加質量効果による慣性抵抗)

いま、静止流体中を円柱が任意に動く場合を考えます。円柱のまわりに Γ なる循環があるとすれば、複素速度ポテンシャルは (11) 式ようになります。

$$f = -\frac{a^2 \dot{\zeta}}{z-\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z-\zeta) \dots \dots (11)$$

ここに ζ は円柱の中心で、従って $\dot{\zeta} = d\zeta/dt$ は円柱の速度 (の複素表示) です。この式を t について微分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{a^2 \ddot{\zeta}}{z-\zeta} - \frac{a^2 \dot{\zeta}^2}{(z-\zeta)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\dot{\zeta}}{z-\zeta} \dots \dots (12)$$

今、Fig. 1-3 に示すように円柱の速度の大きさを U 、 x 軸となす角を θ 、 z - の偏角を χ とすれば

$$\dot{\zeta} = Ue^{i\chi}, \quad z-\zeta = re^{i(\theta-\chi)} \dots \dots (13)$$

(13) 式を (12) 式に代入し、とくに円柱表面上 ($r=a$) を考えると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{r=a} = U^2 e^{-2i\theta} - \left(a\dot{U} + iaU\dot{\chi} + \frac{U\Gamma}{2\pi ia}\right) e^{-i\theta}$$

この実数部をとれば $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{r=a} = U^2 \cos 2\theta - a\dot{U} \cos \theta - \left(aU\dot{\chi} - \frac{U\Gamma}{2\pi a}\right) \sin \theta \dots \dots (14)$

が得られます。次に、流速は $q = \left|\frac{df}{dz}\right|$ で求められます。円柱表面では (15) 式となります。

$$\frac{df}{dz} = \frac{a^2 \dot{\zeta}}{(z-\zeta)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-\zeta}\right) = \left(\frac{Ua^2}{r^2} e^{-i\theta} + \frac{\Gamma}{2\pi ir}\right) e^{-i(\theta+\chi)} \quad q^2 = \left|\frac{df}{dz}\right|^2 = U^2 + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 + \frac{\Gamma U}{\pi a} \sin \theta \dots \dots (15)$$

(14) 式と (15) 式を (5) 式に代入すれば、円柱表面の圧力分布は以下のようになります。

$$p = \rho \left\{ F(t) - \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 - U^2 \cos 2\theta + a\dot{U} \cos \theta + \left(aU\dot{\chi} - \frac{U\Gamma}{\pi a}\right) \sin \theta \right\} \dots \dots (16)$$

円柱に働く力 P の進行方向および直角方向の成分を P_1, P_2 とすれば、(9) 式により以下のように定まります。

$$P_1 = -a \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta = -\pi a^2 \rho \dot{U} \quad P_2 = -a \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta = -\pi a^2 \rho U \dot{\chi} + \rho U \Gamma \dots \dots (17)$$

U は明らかにクッタ・ジューコフスキーの定理から期待される揚力ですが、そのほかに $\dot{U}, U\dot{\chi}$ すなわち加速度に比例する力を受けます。このことを空間に固定した座標系で考えてみましょう。 P の x, y 成分を P_x, P_y とすれば、容易にわかるとおり

$$P_x + iP_y = (P_1 + iP_2) e^{i\chi} = -\pi a^2 \rho (\dot{U} + iU\dot{\chi}) e^{i\chi} + i\Gamma U e^{i\chi} = -\pi a^2 \rho \ddot{\zeta} + i\Gamma \dot{\zeta} \dots \dots (18)$$

円柱の質量を M 、これに働く外力を (X, Y) とすれば、流体から受ける力 (18) 式を考慮して、運動方程式は複素表示で

$$M\ddot{\zeta} = Z - \pi a^2 \rho \ddot{\zeta} + i\Gamma \dot{\zeta}, \quad (Z=X+iY) \quad \text{あるいは} \quad (M+M')\ddot{\zeta} = Z + i\Gamma \dot{\zeta} \quad M' = \pi a^2 \rho \dots \dots (19)$$

揚力の項 $i\Gamma \dot{\zeta}$ を度外視すると、流体中の円柱の運動は、 M' だけ質量を増した円柱が真空中を運動するときと同等です。このことは円柱に限らず任意の物体について成り立ち、物体の運動にともなって流体が引きずられて動くために、慣性が増加することを示しています。 M' を付加質量 (Added Mass) または仮想質量 (Virtual Mass) と呼びます。 M' の値は物体の形によって異なりますが、円柱では (19) 式から明らかのように、その排除する流体の質量とちょうど一致します。

機械工学便覧には Table 1-1 に示すように各種の形状について M' を計算した結果 *5 が掲げられています。同書には回転運動に対する付加慣性モーメントの値も同時に示されており、また 3 次元形状に関する結果もあります。流体が気体の場合には密度が小さいので、この慣性抵抗は問題になりません。しかし、流体に接する構造物では問題になります。粘性抵抗は表面積に比例するのに対し、慣性抵抗は体積に比例します。従って、構造物のスケールが大きくなるほど、慣性抵

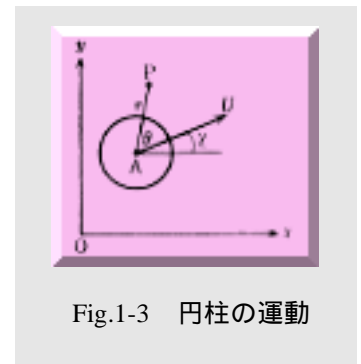


Fig.1-3 円柱の運動

抗は粘性抵抗に卓越することになります。例えば地震、波浪などに伴う付加質量の増加は固有振動数の低下をもたらすので、これを考慮に入れる必要があります。

4. 付加質量効果のFEM解析

以上に示した3つの流体反力(圧力抵抗、揚力、慣性抵抗)のうち、慣性抵抗はMARC*6のような構造系のFEMにより計算することができます。これは、(4)式の速度ポテンシャルに関するラプラスの式が定常の熱伝導問題と同じ形式であるので、流体部分を熱伝導要素でモデル化すれば、構造物との界面における流体圧力の寄与を知ることができるからです。更にそれを表面について積分すれば、(16)~(19)式の手順と同じに付加質量が求まります。これを通常の質量マトリクスに追加してやれば、流体中の構造物の固有振動解析を実行することができます。

MARCではFLUID SOLID オプションを用いて構造物と流体の界面を指定し、MODAL SHAPE オプションで固有値解析を行います。それに続けてDYNAMIC CHANGE オプションを用いれば、モード重畳法による時刻歴解析を実行することも可能です。

5. 適用例

5.1 静止流体中の円柱の固有値解析

3.3項で示した円柱の問題を実際に解析してみましょう。簡単のために剛な円柱が、流体中でバネkによって支持されているものとします。言うまでもなく、この1自由度系のモデルの固有振動数fは以下ようになります。

$$\text{流体のない場合} : f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/M}$$

$$\text{流体がある場合} : f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/(M+M')} \dots (20)$$

紙面垂直方向のモデルの奥行きを単位厚さとする、M、M'は以下ようになります。また工学単位系により以下の条件を想定します。

$$M = \rho_s a^2, \quad M' = \rho_f a^2 \dots (21) \quad \text{円柱の半径 } a=1\text{mm} \quad \text{円柱の密度 } \rho_s=3 \times 10^{-10}\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}$$

$$\text{バネ定数 } k=0.01\text{kg/mm} \quad \text{流体の密度 } \rho_f=1 \times 10^{-10}\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}$$

Fig. 1-4 に解析モデルと得られた固有モードを示します。円柱をタイプ 11 の平面ひずみ要素、流体をタイプ 39 の熱伝導要素でモデル化し、円柱を固定点に対して SPRINGS で x 方向にバネ支持しました。固有振動数のFEM解は理論解と良い一致を示します。

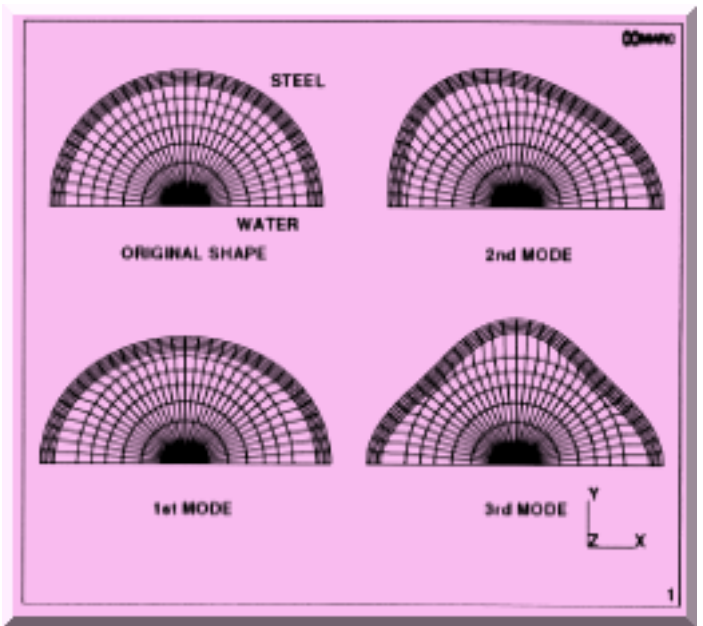
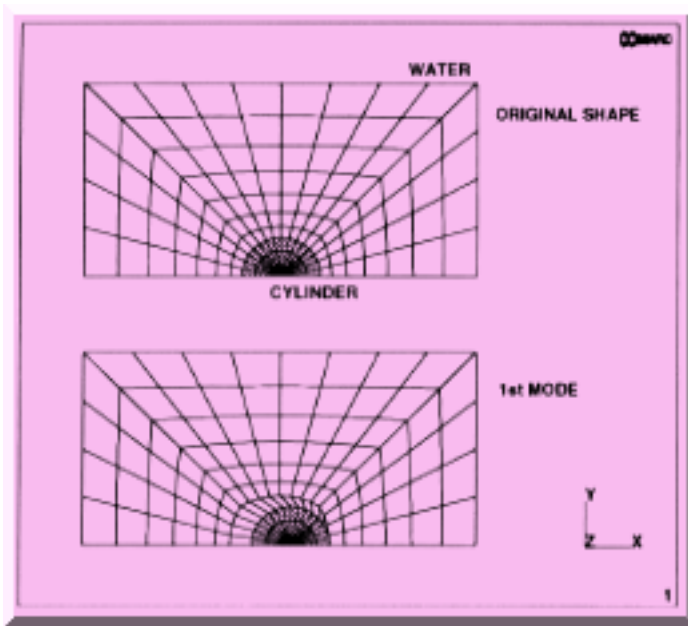
5.2 水を内包する円筒胴の固有値解析

この円筒胴(リング)の固有値解析は、既刊の Mech D & A News Vol.96-3 で取上げました。断面内では支持点のない条件であるので、剛体変位モード(零固有値)を避けるための工夫が施されています。解析モデルおよび結果を Fig.1-5 に示します。水がある場合とない場合の固有振動数の結果を比で示すと、次数が高くなるに従って、付加質量の効果は軽減することがわかります。

■ 図 1-1 比較軸体の単位長さあたりの付加質量および付加慣性モーメント (軸まわりの回転)

形 状	付 加 質 量	付 加 慣 性 モーメント (軸まわりの回転)	備 考																		
円	$\rho \pi a^2$	0																			
円	$\rho \pi a^2$ $\rho \pi b^2$	$\frac{2}{5} \rho a^2 - b^2$																			
長方形	$\rho K_1 a^2$	$\frac{K_2}{8} a^2$	<table border="1"> <tr> <td>$\frac{K_2}{K_1}$</td> <td>0</td> <td>0.1</td> <td>0.2</td> <td>0.5</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>K_1</td> <td>1.00</td> <td>1.34</td> <td>1.21</td> <td>1.36</td> <td>1.50</td> <td>1.70</td> <td>1.98</td> <td>2.23</td> </tr> </table>	$\frac{K_2}{K_1}$	0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	K_1	1.00	1.34	1.21	1.36	1.50	1.70	1.98	2.23
$\frac{K_2}{K_1}$	0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10													
K_1	1.00	1.34	1.21	1.36	1.50	1.70	1.98	2.23													
ひし形	$\rho K_1 a^2$	$\frac{K_2}{8} a^2$	<table border="1"> <tr> <td>$\frac{K_2}{K_1}$</td> <td>0.5</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>K_1</td> <td>0.80</td> <td>0.78</td> <td>0.67</td> <td>0.61</td> </tr> </table>	$\frac{K_2}{K_1}$	0.5	1	2	5	K_1	0.80	0.78	0.67	0.61								
$\frac{K_2}{K_1}$	0.5	1	2	5																	
K_1	0.80	0.78	0.67	0.61																	
楕円	$\rho \pi a b$	$\frac{\pi}{8} \rho a^2$																			
円錐	$\frac{\rho \pi a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)$ $\frac{\rho \pi a^2}{2} \cos^2 \alpha$																				
ジュウコウスケーヤ形	$\frac{\rho \pi a^2}{4} \left(4 + \frac{4-2}{4+1}\right)$ $\frac{\rho \pi a^2}{4} (4-2)(4+1)$																				
同心円柱 (円筒内の円)	$\rho \pi a^2 \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$	0																			
固定壁 (くの字)	$\rho \pi^2 K_1$	$\frac{K_2}{8} a^2$	<table border="1"> <tr> <td>$\frac{K_2}{K_1}$</td> <td>∞</td> <td>2.5</td> <td>0.5</td> </tr> <tr> <td>K_1</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.165</td> </tr> </table>	$\frac{K_2}{K_1}$	∞	2.5	0.5	K_1	1.00	1.00	1.165										
$\frac{K_2}{K_1}$	∞	2.5	0.5																		
K_1	1.00	1.00	1.165																		
平板	$\frac{2\rho a^2}{\pi} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$																				

Table 1-1 付加質量の計算例



	理論解	FEM
水無	518Hz	520Hz
水有	449Hz	448Hz

	水無	水有	比
1次	680Hz	570Hz	0.84
2次	1930Hz	1690Hz	0.88
3次	3700Hz	3330Hz	0.90

参考文献

- *1 大橋・梶，日本機械学会誌，82-728，p.702，1979.
- *2 Lamb, H., Hydrodynamics, 6th ed., p.160, Cambridge Univ. Press, 1932.
- *3 今井，流体力学，岩波全書 275，p.68，岩波書店，1970.
- *4 日野，流体力学，p.35，朝倉書店，1974.
- *5 日本機械学会，機械工学便覧，p.A3-121，1986.
- *6 MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。