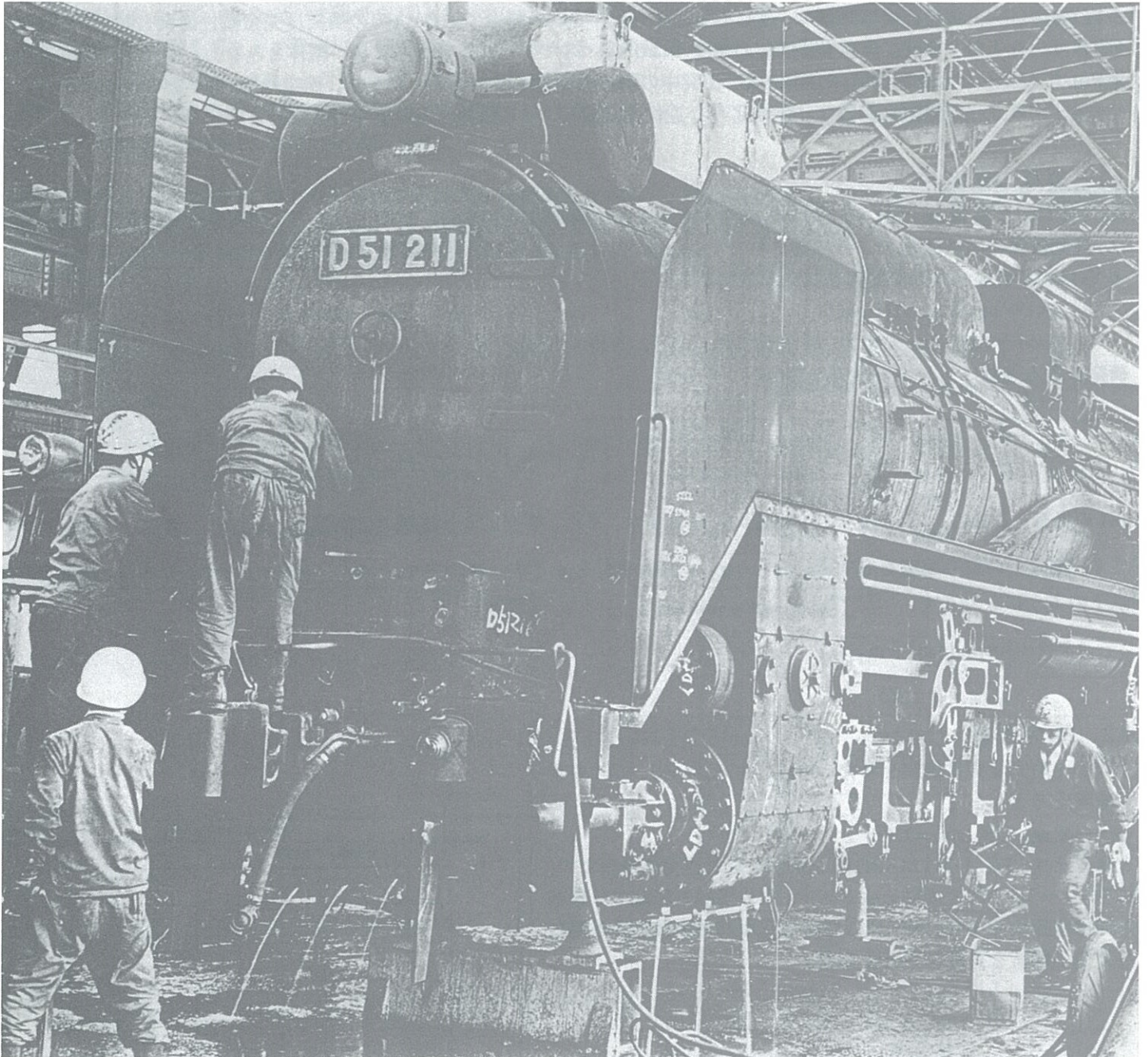


Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

December 1996



【特集】 衝撃応答の解析

旧国鉄鷹取工場（昭和40年頃）

- ・ 質点の玉突き衝突
- ・ 落下による衝撃
- ・ 梁の衝撃曲げ

Newton's Impulse Law

Impact of Dropped Body

Impulse Bending of Beam

製品の軽量化や高機能化に伴って、衝撃に対する健全性を問われることが多くなってきました。特に、輸送中や荷役中に受ける落下の問題は、製品に深刻な損傷をもたらすことが少なくありません。ここでは以下のような3つの問題を取り上げ、衝撃に関する基礎的なモデルを解析してみました。

【特集1】質点の玉突き衝突

相対速度をもつ2物体が接触して互いに力を及ぼしあう現象を衝突といい、非常に短い接触時間の中に大きい接触力を生ずるのがその特徴です。一般に、衝突前の2物体の運動量の和および角運動量の和は衝突後も不変であって、この運動量保存則と角運動量保存則及びはねかえりの係数 (e) から、衝突後の2物体の速度や角速度が決定されます。

$e=1$ の衝突は完全弾性衝突と呼ばれ、運動エネルギーも保存される場合であり、 $e=0$ の衝突は完全塑性衝突と呼ばれ、衝突後2物体は一体となります。実在する固体の衝突では $0 < e < 1$ です。物体を変形しない剛体とみなし、衝突後の重心速度を求めるこのような古典的な剛体力学では、衝突中の物体の弾性・塑性変形、衝撃力、衝突時間、 e などの内容は得られません。これらは【特集2】以下に示すような近代衝突論によって議論することができます。

1.1 質点の衝突**

Fig. 1-1に示す質量 m_1 と m_2 の2物体の衝突を考えます。衝突前の速度を v_1 と v_2 とします。速度は全て右向きを正にとれば、運動量保存則は(1)式のように書かれます。(2)式のはねかえりの係数の定義(衝突前後の相対速度の比)を用いて、 V_1 と V_2 はつぎのように e の関数として表されます。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad \dots\dots(1) \quad e = - (V_2 - V_1) / (v_2 - v_1) \quad \dots\dots(2)$$

$$V_1 = v_1 - \{m_2 / (m_1 + m_2)\} (1 + e) (v_1 - v_2), \quad V_2 = v_2 + \{m_1 / (m_1 + m_2)\} (1 + e) (v_1 - v_2) \quad \dots\dots(3)$$

衝突による運動エネルギーの損失 ΔE は、

$$\Delta E = \sum_{i=1}^2 m_i v_i^2 / 2 - \sum_{i=1}^2 m_i V_i^2 / 2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2 \quad \dots\dots(4)$$

$e=1$ の場合、 $\Delta E=0$ 、 $e=0$ の場合 ΔE は最大となります。また、衝突による接触力は衝撃力と呼ばれ、慣性力に等しくなります。衝突中の重心速度を右向きに $\dot{\alpha}_1$ 、 $\dot{\alpha}_2$ 、相対変位を α とすれば、 $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ 、 $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2$ であり、衝撃力 F は以下のようになります。

$$F = - \{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)\} \ddot{\alpha} \quad \dots\dots(5)$$

1.2 FEM 解析

いま $e=1$ の完全弾性衝突を考え、 $m_1=2$ 、 $m_2=1$ 、 $v_1=2$ 、 $v_2=1$ の条件を考えると、

$$V_1 = 1.333, \quad V_2 = 2.333 \quad \dots\dots(6)$$

となります。Fig. 1-2はMARCにより解析した速度の履歴です。図中 $t=1 \sim 3.5$ の間で接触を生じます。剛体接触の理論では接触時間は直接扱えませんが、ここでは適宜なバネ定数を質点間を与えて、解析を可能とさせました。

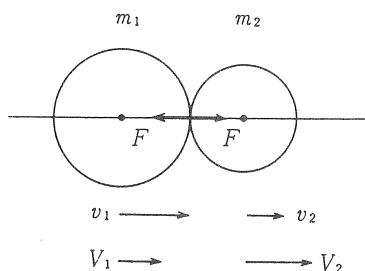


Fig. 1-1 2物体の心向き直衝突

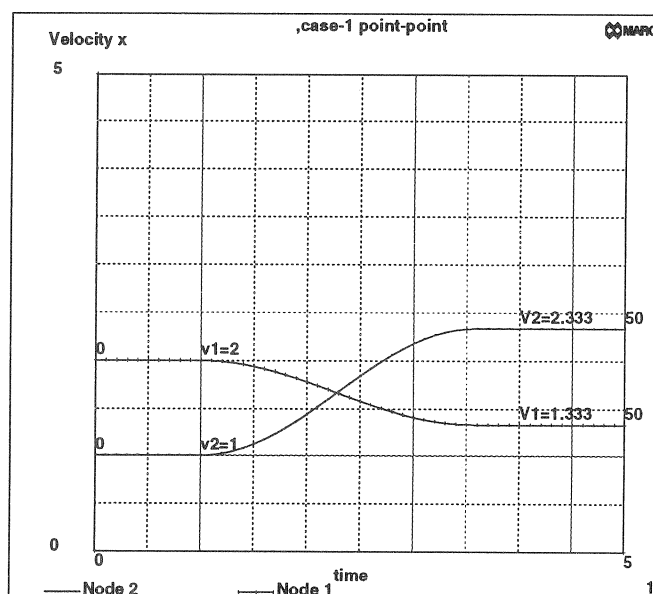


Fig. 1-2 速度履歴

【特集2】落下による衝撃

2.1 1自由度系の落下衝撃***

梱包された品物を1自由度の振動系とみなして、落下後の着地時の衝撃を取扱います。このモデルは、梱包をばねとし、品物を質量としてもよいし、品物内部の弾性支持された部品を考えてもかまいません。

Fig. 2-1に示す減衰をもつ1自由度振動系が、高さhから落とされたとし、t=0ではばねの先端が着地したとします。このときの質量mの位置を絶対変位xの原点にとると、接地してからの運動方程式は(1)式ようになります。(2)式の初期条件の下でこれを解きます。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg \quad \dots\dots(1) \quad \text{初期条件は、} t=0 \text{で } x=0, \dot{x} = \sqrt{2gh} \quad \dots\dots(2)$$

解は(3)式ようになります。

$$x = \frac{\sqrt{2gh}}{v\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta vt} \sin\sqrt{1-\zeta^2} vt + \delta_{st} \left\{ \frac{e^{-\zeta vt}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} vt + \gamma) + 1 \right\} \quad \dots\dots(3)$$

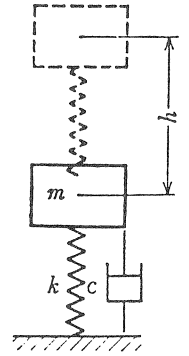
ただし、 ζ は減衰比であり、

$$\delta_{st} = mg/k, \quad v^2 = k/m, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{g}{v\sqrt{2gh}}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \dots\dots(4)$$

いま、 h/δ_{st} が充分大きい場合を考えると

$$\frac{\sqrt{2gh}}{v} = \frac{g}{v^2} \sqrt{\frac{2hv^2}{g}} = \frac{mg}{k} \sqrt{\frac{2h}{mg/k}} = \delta_{st} \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} \quad \dots\dots(5)$$

Fig. 2-1 1自由度振動系の落下



であって、右辺第2、第3項は第1項に比べて小さいので、第1項だけを残して二度、微分すると、

$$\ddot{x} = -\frac{v\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta vt} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} vt + \phi) \quad \text{ただし } \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \dots\dots(6)$$

書き直すと
$$-\frac{\ddot{x}}{g} \frac{1}{\sqrt{2h/\delta_{st}}} = \frac{e^{-\zeta vt}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} vt + \phi) \quad \dots\dots(7)$$

(6)式から $\cos\phi = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$ であることに注意すると、(7)式の右辺はt=0のときには2 ζ になることがわかります。

(7)式によって、 \ddot{x} の時間経過を減衰比のいろいろの値について図示するとFig. 2-2ようになります。図から判るように、 ζ が0.5よりも大きいときには、最大加速度はt=0、すなわち着地の瞬間に生じ、 ζ が0.5よりも小さいときには、最大値は着地後に起こります。また、最大加速度の値をなるべく小さくするためには $\zeta = 0.25$ 付近の値を採用すれば良いことがわかります。自動車のサスペンションのダンパーの減衰比はこの程度にとられることが多いようです。

2.2 FEM解析

w=30kgの重量を持つ製品にk=3N/mm(0.3061kg/mm)のばねを付けて、h=1000mmの高さから落下させる条件を考えます。各種のパラメータは以下の値となります。

$$V_0 = \sqrt{2gh} = 4427 \text{ mm/sec} \quad f_n = v/2\pi = 1.592 \text{ rad/sec}$$

$$\delta_{st} = mg/k = 98 \text{ mm} \quad T = 1/f_n = 0.6283 \text{ sec}$$

$$v = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/sec}$$

$$c = \zeta c_c = 2\zeta\sqrt{mk} = 0.06122\zeta$$

$$\left(\sqrt{2h/\delta_{st}} \cdot g\right)^{-1} = 2.259 \times 10^{-5}$$

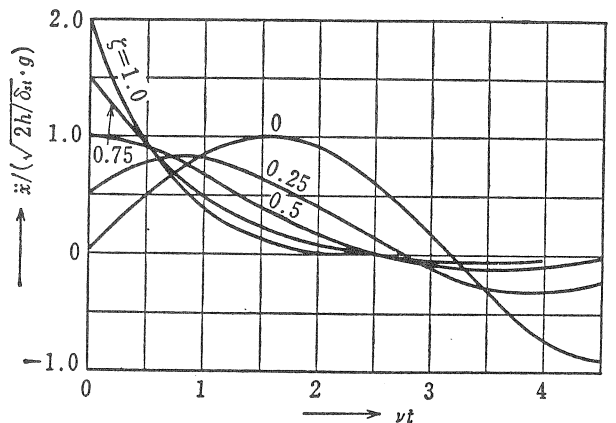


Fig. 2-2 着地後の加速度の履歴 (理論解)

質点（節点）に集中質量を持たせ、重力の下で初期速度を与えて解析しました。地面との間にはギャップ要素を設け反跳を表現できるようにしました。ダッシュポットのcの値を調整し、 $\zeta=0, 0.25, 1.0$ の3ケースについて変位を解析した結果をFig.2-3に示します。 $\zeta=0$ の場合、質点は約600mm沈み込んだ後、再び $h=1000\text{mm}$ まで上昇します。 $\zeta=0.25$ の場合は約400mm沈んだ後、振幅は減衰してゆきます。 $\zeta=1.0$ （臨界減衰）の場合は、振動を殆んど生ずることなく、静的変位量 $\delta_{st}=98\text{mm}$ に漸近することがわかります。

Fig.2-4は加速度の履歴を示します。理論解にあるように、 $\zeta=0.25$ の加速度が最も小さく、履歴の挙動はFig. 2-2に一致します。但し、理論解は接地している間の挙動のみを表現し、反跳まで含んだ結果とはなっていない点に注意して下さい。

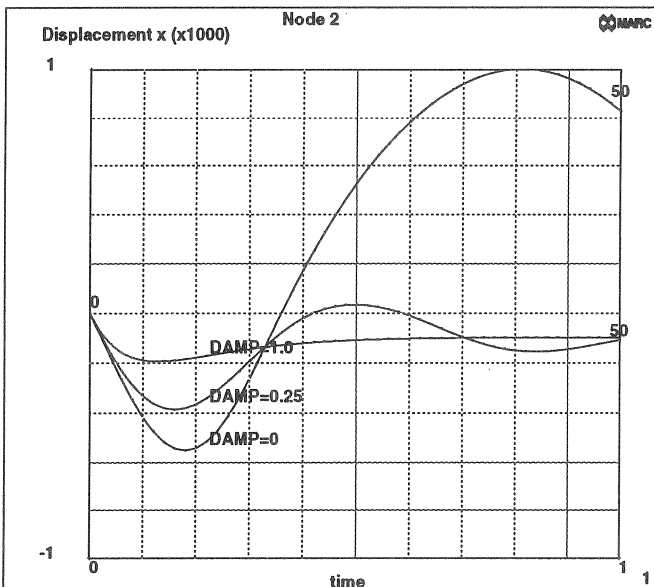


Fig. 2-3 質点の変位履歴

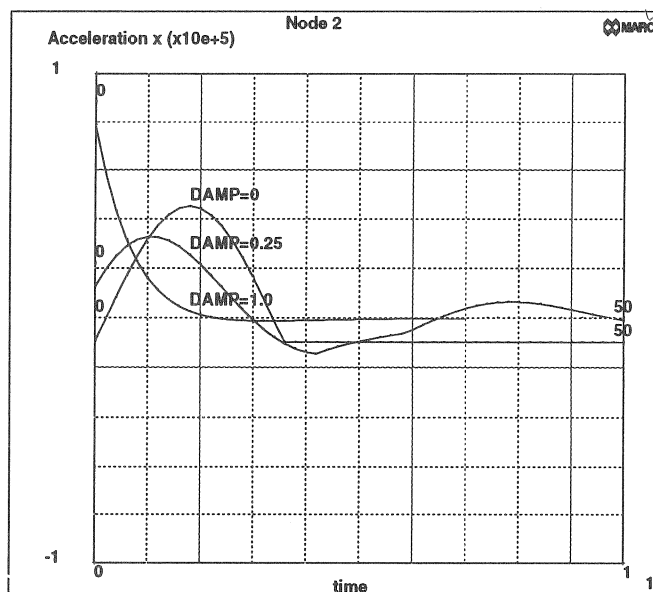


Fig.2-4 質点の加速度履歴

【特集 3】 梁の衝撃曲げ

3.1 中央が衝撃される両端支持ばり ****

重さ W_0 の物体が高さ h から自由落下して、重さ W 、長さ l のはりに衝突したとき、はりの最大たわみ w_{max} および最大曲げ応力 σ_{max} と荷重 W_0 によるたわみ w_s および静応力 σ_s との比は

$$\frac{w_{max}}{w_s} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_s} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_s}K} \dots\dots(157)$$

ただし、 K は $\kappa = W/W_0$ のみによって決まる定数です。式(157)によれば、落下高さ h が小さい場合には、たわみおよび応力は静的な値の約2倍になり $h/W_s \gg 1$ ならば

$$w_{max} \doteq \sqrt{2hw_sK} \dots\dots(158) \quad \sigma_{max} \doteq \frac{EIV_0}{c_bZ} \sqrt{\frac{3}{\kappa}} K \dots\dots(159)$$

ここで、 $c_b^2 = EIg/\gamma A$ であり、 EI, Z, A, γ, g はそれぞれはりの曲げこわさ、断面係数、横断面積、単位体積の重量、重力加速度です。 σ_{max} は衝突速度 $V_0 = \sqrt{2gh}$ にほぼ比例し、はりの長さ l に無関係となります。更に $\kappa \ll 1$ ならば式(159)は

$$\sigma_{max} \doteq \frac{EIV_0}{c_bZ} \sqrt{\frac{3}{\kappa}} \dots\dots(160) \text{ となり、} \sigma_{max} \text{ は、はりの支持状態によらず一定値をとることになります。}$$

中央が衝撃される両端支持ばりの場合は、最大曲げ応力ははりの中央に生じます。 κ が小ならば、はりの最低次の固有振動周期の1/2程度の時間に σ_{max} が生じ、測定値はFig. 3-1のようにほぼ式(159)と(160)の間に散らばります。 $\kappa > 3$ では衝突直後に最大曲げ応力が生じ、この曲げ応力はひずみエネルギー法による式(159)、式(160)では説明できないと言われています。

3.2 FEM 解析

長さ $l=200\text{mm}$, $10 \times 10\text{mm}$ の正方形断面 ($A=100\text{mm}^2$, $Z=166.6\text{mm}^3$, $I=833.3\text{mm}^4$) の両端支持ばりを対象とします。材料定数を $E=20000\text{kg/mm}^2$, $\rho=8 \times 10^{-10}\text{kg sec}^2/\text{mm}^4$ とすると、各種のパラメータは以下のようになります。

$$W = \rho g A l = 0.1568\text{kg} \quad (W/g = 1.6 \times 10^{-5}\text{kgsec}^2/\text{mm}) \quad c_b = (EI/\rho A)^{0.5} = 1.443 \times 10^7$$

$$\frac{c_b Z}{V_0 EI} \sigma_{\max} = \frac{c_b Z}{V_0 EI} \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{c_b}{EI} \frac{M_{\max}}{V_0} = 0.8658 \frac{M_{\max}}{V_0}$$

Fig. 3-2 に示すような 1/2 モデルで解析を行いました。Node 11 がはりの中央であり、Node 12 が初速度 V_0 を持つ質点です。これらの節点の間はギャップ要素で結びました。はりと Node 12 の重量比 κ や、初速度 V_0 を Table 3-1 のように変えて解析しました。Fig. 3-3 はケース 1 とケース 3 の Node 11 における曲げモーメントの履歴です。ケース 1 ($\kappa = 0.5$) では最大曲げモーメントははりの固有周期 (約 0.002sec) の約 1/2 の時間で生じ、ケース 3 ($\kappa = 5$) では衝突直後に生じることがわかります。これは前述の従来の見解に一致します。

履歴中の最大値を Table 3-1 のように整理した結果を実測値と比べると、Fig. 3-1 のプロットのようにになります。解析結果は実測値よりもやや高目になりますが、これは減衰の効果を含めていないためと考えられます。

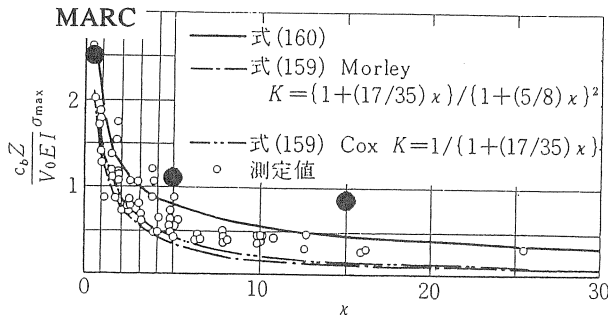


Fig. 3-1 両端支持ばりの最大衝撃曲げ応力

Table 3-1 解析結果

ケース	$\kappa = \frac{W}{W_0}$	V_0 [mm/sec]	M_{\max} [kgmm]	$\frac{c_b Z}{V_0 EI} \sigma_{\max}$
1	0.5	1000	2896	2.51
2	0.5	5000	14480	2.51
3	5	1000	1372	1.19
4	15	1000	1064	0.92

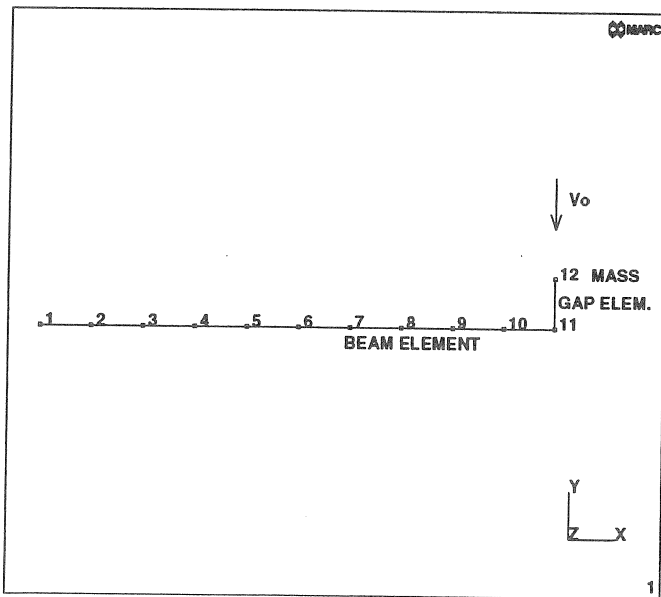


Fig. 3-2 解析モデル

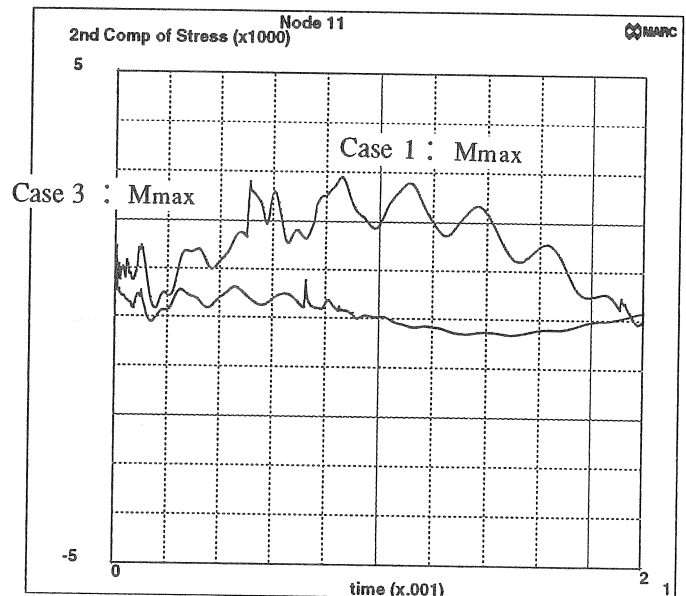


Fig. 3-3 曲げモーメントの履歴

* MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。
 ** 機械工学便覧, 新版, p.A3-36, 日本機械学会, 1992.
 *** 国枝, 実用機械振動学, p.55, 理工学社, 1990.
 **** 機械工学便覧, 新版, p.A4-39, 日本機械学会, 1992.

表紙:「蒸機とともに一世紀」, 日本国有鉄道鷹取工場編, 1970. より引用させて頂きました。

D51 形式機関車は昭和 11 ~ 20 年にかけて製造され、総製造台数 1115 両。写真は 48ヶ月毎全般検査の最終工程。