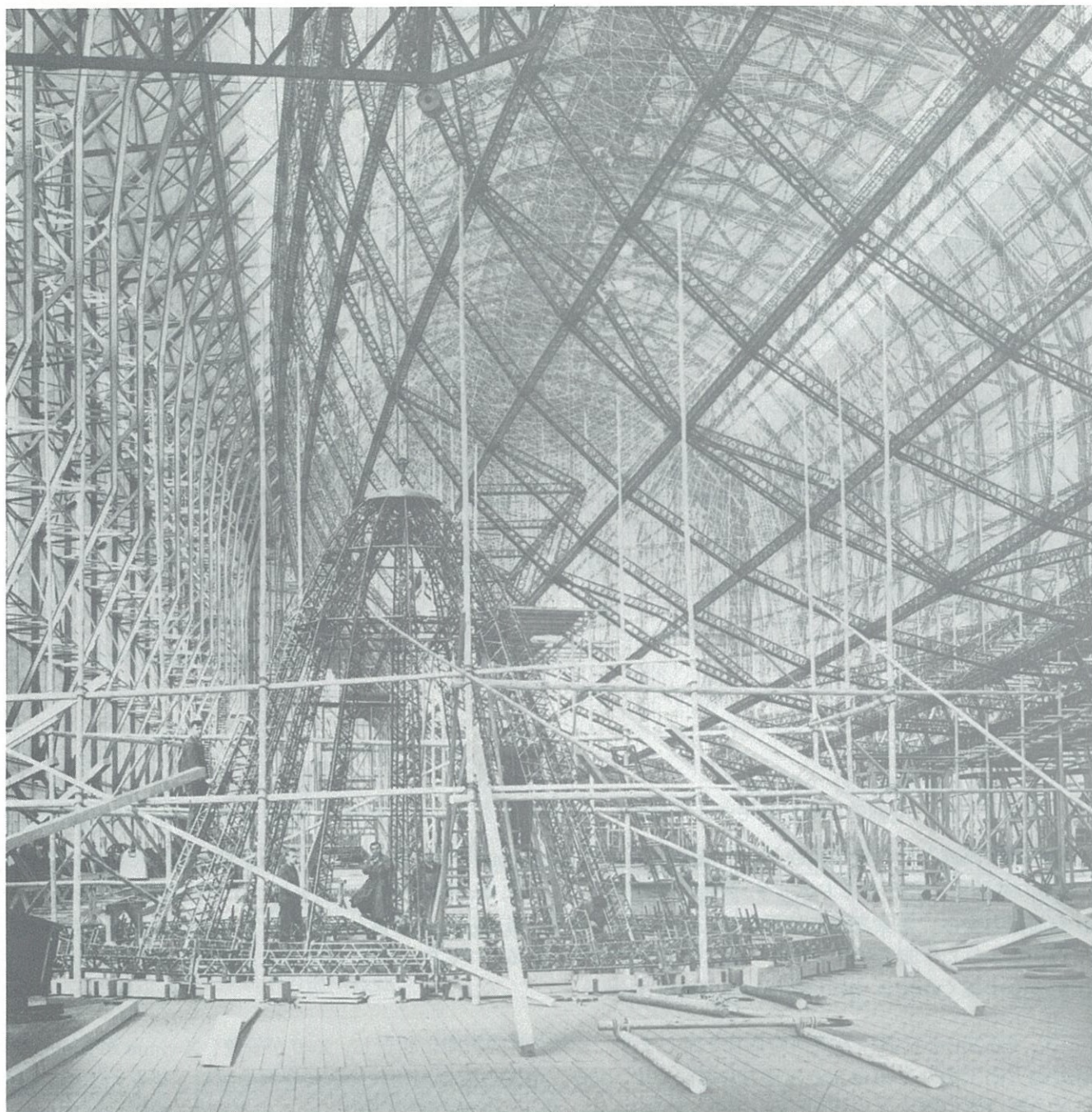


# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

October 1996



Airship "Hindenburg" (1936)

- 【特集】**
- 1 . 表面張力の解析 Surface Tension of Fluid
  - 2 . 浮遊体の固有振動解析 Eigen Analysis of Free Body

# 【特集 1】 表面張力の解析

## 1.1 毛細管現象 \*\*

はんだ付けのプロセスのように微細な、すなわち毛細管的な挙動が無視できない現象では、表面張力が大きな役割を持ちます。液体の自由表面は、分子力の作用のため縮まろうとする傾向をもち、膜を張ったような状態にあります。この膜を切ったと仮想したとき、切り口の単位長さ当たりの張力  $\sigma$  を表面張力 (surface tension) といいます。例えば、1 atm, 20℃の水が空気あるいは飽和蒸気と接しているとき、いずれも  $\sigma = 7.4 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}$  です。液体表面の曲率半径を  $c$  とすると、表面張力によって液面の内外 (法線方向) には (1) 式に示す圧力差を生じます。微視的なプロセスでは、この圧力差は無視できない値となります。

例えば Fig. 1-1 のように液体の自由表面に細管を立ててみましょう。表面張力のために液面は曲率を持ちながら細管内を上昇 (あるいは下降) します。細管の内半径を  $r$ 、液体およびその表面をおおう流体の密度をそれぞれ  $\rho$ 、 $\rho'$ 、重力加速度を  $g$  とすると、液柱の平均高さ  $h$  は (2) 式のようにになります。

(2) 式で  $\theta$  は接触角 (contact angle) と呼ばれ、水と、よくみがいたガラス壁、および空気とが常温で境を接しているとき (液体が壁を完全にぬらす場合)  $\theta = 0$  になります。但し、この接触角は接触面の状態 (固体壁および表面をおおう液体の種類および状態) によってかなり異なると言われています。

いま、1 atm, 20℃の水と空気を考え、 $\theta = 0$ 、 $\rho g = 1.0 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、 $\rho' = 0$  とすると (2) 式は (3) 式のように簡単になります。すなわち、例えば半径  $r = 5 \text{ mm}$  の円管を考えると、 $h = 3 \text{ mm}$  まで液位は上昇します。

$$\Delta p = \sigma / c \quad \dots \dots (1)$$

$$h = 2\sigma \cos\theta / g(\rho - \rho')r \quad \dots \dots (2)$$

$$h = 15/r \quad \dots \dots (3)$$

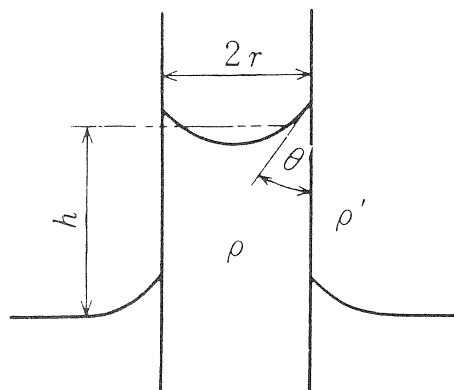


Fig. 1-1 毛細管現象  
Fluid in Narrow Tube

## 1.2 FEM 解析

Fig. 1-2 に示すように、毛細管を軸対称モデルで解析しました。水をメッシュ分割し、管壁は CONTACT の剛体壁としています。水は粘性流体とし、粘性係数として  $\mu = 1.0 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{sec/mm}^2$  を与えました。初期状態において、水の右側端面は  $h=0$  の重力の基準面に合わせておきます。管壁の近傍のメッシュには、曲率が有限の値を持つように初期不整を与えました。曲率と表面張力から、要素表面に作用する圧力が求まります。この圧力は自重と釣り合うまで液面を引き上げます。(1) 式からわかるように、曲率半径が小さい程この圧力は大きくなるので、Fig. 1-3 に示すように管壁をはい上がるように (曲率半径がより小さくなるように) 液面は上昇します。

Fig. 1-4 は、 $t=0.2 \text{ msec}$  における液面の形状を示します。X 軸が半径方向に相当し、 $X=0$  が管壁、 $X=5 \text{ mm}$  が管中心です。Y 軸は管の軸方向であり  $Y=0$  は  $h=0$  の重力基準面です。図中、ACTUAL は表面の節点の座標をプロットしたもの、LSQM は表面近傍の積分点位置をユーザ・サブルーチンに取り込み、最小二乗法で曲線近似させた結果です。近似曲線としてここでは指数関数  $y = A \exp(Bx)$  を用いました。これは対数をとることにより 1 次の直線となるので、最小二乗法の計算が簡単になります。ここでは液面の高さに応じて Y 軸をシフトさせ、誤差が最小となるように調節させました。得られた近似式から、各積分点における曲率半径  $c$  を (4) 式で求め、更に (1) 式により圧力を計算してその積分点に与えました。

$$c = (1 + y'^2)^{1.5} / y'' \quad \dots \dots (4)$$

この解析では自重のモデル化がポイントの1つです。表面張力による圧力と釣り合う自重 ( $\rho gh$ ) が発生するまで液面が移動する解析を行うので、重力を直接外力として入力することはできません。そこで等価なバネでモデル化するものとなりました。液柱の断面積を  $A$  とすると、水頭  $h$  が立った時の自重による総荷重は  $W = \rho gAh$  となります。今、液柱のモデル軸長を  $L$  とすると、 $W$  をモデル全体に負担させたとき、単位体積あたりの荷重は  $W/AL = (\rho g/L)h$  となります。今、 $h$  は軸方向の変位に相当するので、 $\rho g/L$  は分布バネ定数に相当することになります。FOUNDATION オプションを用いて、この分布バネ定数を入力しました。尚、表面張力や自重は、モデルの変形に依存する荷重であるので、FOLLOW FOR オプションによる従動荷重としての扱いが必要であることに注意して下さい。

Fig. 1-5 は代表的な節点の軸方向変位を示します。図中の節点 165 はモデル左端を示し、液面の平均的な移動量を代表します。  $t = 0.32 \text{ sec}$  で約  $3\text{mm}$  の変位が発生し、(3) 式の理論解と一致します。尚、変位はその後減少しますが、これは Fig. 1-3 に示すように液面が際限なく管壁をはい上がるためです。現実には管壁との接触角は  $0$  に近い有限値をもつので、解析から求まるこの極大値の近傍で静定するものと考えられます。

- \* MARC プログラムは日本マーク株式会社製の製品です。
- \*\* 機械工学便覧， 新版， pp.A5-8 ~ A5-9, 日本機械学会， 1992.

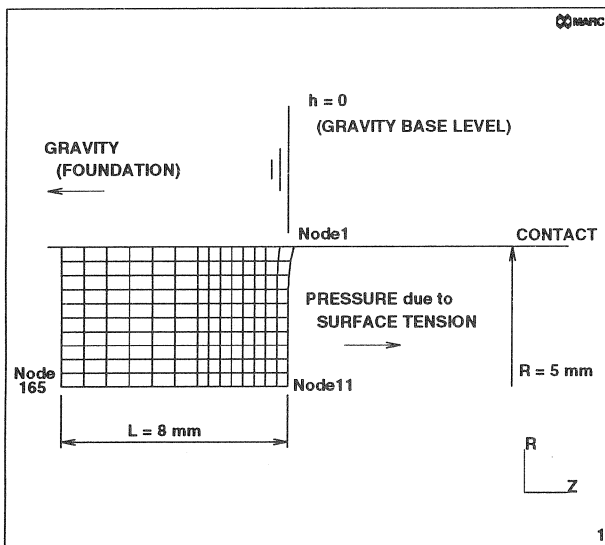


Fig. 1-2 毛細管の解析モデル  
FEM Model

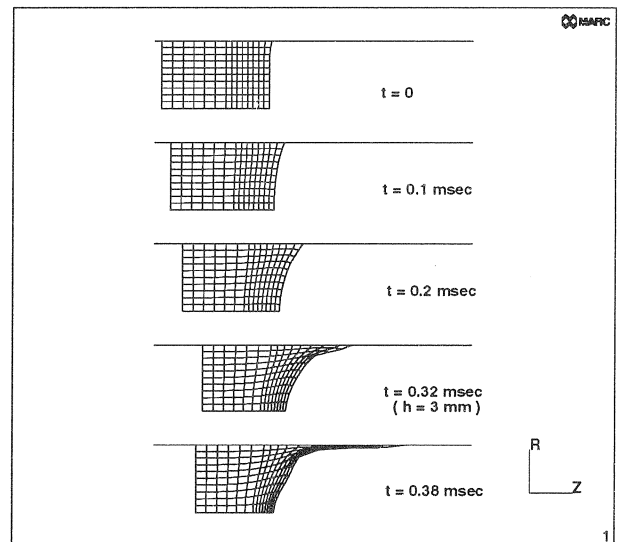


Fig. 1-3 液面上昇  
Elevation of Fluid Surface in Narrow Tube

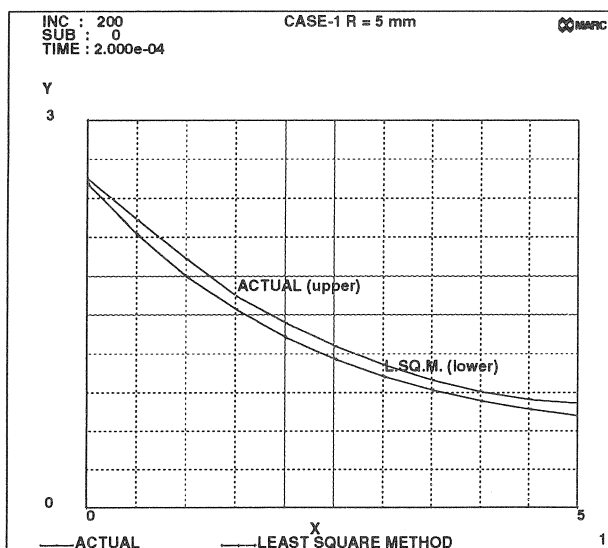


Fig. 1-4 液面形状の最小二乗近似 ( $y = Ae^{Bx}$ )  
Least Square Approximation for Surface Curvature

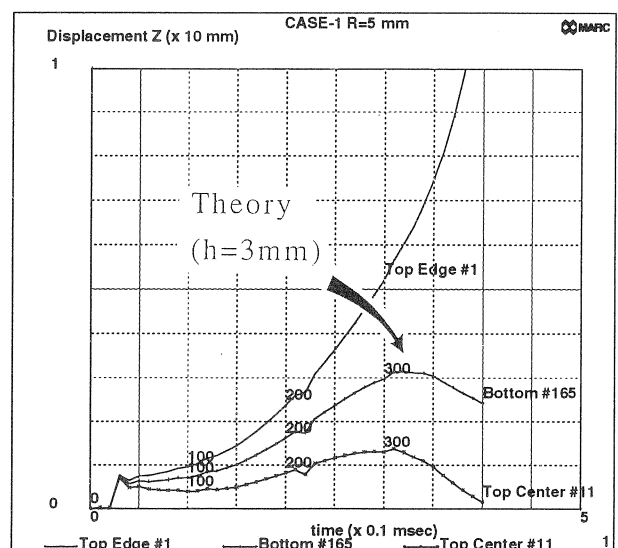


Fig. 1-5 液面上昇履歴  
Displacement of Fluid Surface

## 【特集 2】 浮遊体の固有振動解析

空間や液体中にある構造物の振動解析を行う場合、無拘束の境界条件の下での固有振動モードの抽出が必要となる場合があります。飛行体や船舶はその良い例です。また、長尺の構造物の断面、例えば円筒胴のタンクや大口径の配管の断面内のたわみ振動を見るとときには、断面を2次元平面モデルで解析します。この場合も振動モードの節目（不動点）を特定することが難しいので、無拘束の条件下での解析が必要になります。

実験的には試験体をスポンジの上に置いたり、ゴム糸で釣ったりすることが便宜的に行なわれます。解析的にも構造物を微弱なバネで拘束して解析することが可能です。しかし、その弱いバネとの連成のモードが現れたり、バネの支持点を節にするモードが本来のモードの出現を阻害したりすることが往々にしてあるので、次善の策と心得るのが妥当です。一方、境界条件を無拘束としたときの課題は、周波数0の固有モード（剛体変位モード）を回避する点にあります。今回は、はりの横振動とリングの面内振動を例にとり、解析した結果を紹介します。

### 2.1 自由な真直はりの横振動

真直な一様断面のはりが、2次元平面内で自由振動するとき、その運動方程式は(1)式ようになります。(1)式は4階の微分方程式であり、振動数  $f$  [Hz] の横振動の伝播速度  $a$  は(2)式のような周波数依存性を持ちます。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots(1) \quad a = \left( \frac{EI}{A\rho} \right)^{0.25} \sqrt{2\pi f} \quad \dots\dots(2)$$

このとき、固有振動数  $f$  は、境界条件と振動モードによって定まる無次元数  $\lambda$  をパラメータとして (3) 式となります。

$$f = \frac{\lambda^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \dots\dots(3)$$

$x$  : 軸方向座標     $t$  : 時間     $A$  : 断面積     $E$  : 縦弾性係数  
 $u$  : 横変位     $l$  : 軸長     $I$  : 断面2次モーメント     $\rho$  : 密度

例えば機械工学便覧\*\*には、Fig. 2-1の右図に示す形で各種の境界条件の下での固有振動モードが  $\lambda$  の値とともにまとめられています。今回は図中にあるように自由-自由の条件を扱うこととなります。下記の矩形断面のはりを仮定して解析を行いました。

$$A = bh = 10 \times 10 = 100 \text{mm}^2 \quad l = 100 \text{mm} \quad E = 20000 \text{kg/mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = 833.3 \text{mm}^4 \quad \rho = \frac{\gamma}{g} = 8 \times 10^{-10} \text{kg sec}^2/\text{mm}^4$$

MARC\*の3次元弾性はり要素（タイプ52）を用いて、Fig. 2-1に示すように10分割のモデルを作成しました。境界条件としてはDYとRZを許し、X-Y面内で自由な横振動を生ずるようにしました。固有値解法にはLanczos法を使用し、3次モードまで求めました。このとき、PRINT, 3, を用いて特異マトリックスの強制実行を指示すると共に、0よりも大きい周波数範囲で固有値を抽出するのがポイントです。Fig. 2-1とTable 2-1に解析結果を示します。理論解と完全に一致する結果が得られました。

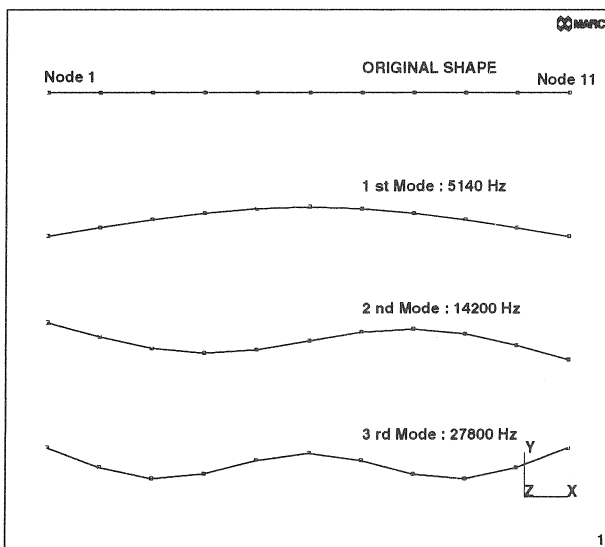
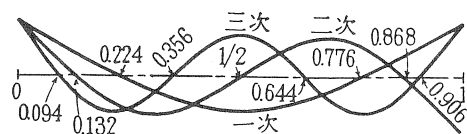


Fig. 2-1 自由な真直はりの横振動

棒の状態および振動モード

#### 1. 自由-自由



次数	1	2	3
振動数係数 $\lambda$	4.730	7.853	10.996

Table 2-1 固有振動数

	$\lambda$	理論解 [Hz]	MARC [Hz]
1次	4.730	5140	5140
2次	7.853	14200	14200
3次	10.966	27800	27800

## 2.2 リングの面内振動

次に Fig. 2-2 に示すようなリングの面内のたわみ振動を解析します。固有振動数は(4)式で与えられます。 \*\*

$$f = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad \dots\dots(4) \quad R : \text{リングの半径} \quad n : \text{変形の波数}$$

$$\rho : \text{単位長さあたり質量}$$

ここで  $\rho$  は単位長さあたりの質量である点に注意して下さい。今回は以下のような矩形断面を持つリングを対象とします。リング半径方向の断面の厚さを  $h$ 、紙面垂直方向の奥行きを  $b$  とすれば、(4)式の  $I$  はリングの曲げ剛性を表現する断面2次モーメントとして、以下のように与えられます。

$$A = bh = 10 \times 10 = 100 \text{ mm}^2 \quad E = 20000 \text{ kg/mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = 833.3 \text{ mm}^4 \quad \rho = \frac{\gamma}{g} bh = 8 \times 10^{-8} \text{ kg sec}^2/\text{mm}^2$$

モデルは Fig. 2-2 に示すように 10 分割とし、MARC の 2 次元はり要素 (タイプ 5, 16)、3 次元はり要素 (タイプ 52) を用いて解析しました。結果を Table 2-2 に示します。タイプ 5 はこの種の曲率を持つ形状に対しては精度が悪いことがわかります。分割精度を上げて結果は殆ど変わりません。タイプ 16 は座標と自由度に微係数を持つので使用法は煩雑ですが、精度は良好です。別売の入力データ解説には、X, Y の座標値から微係数を算出するサブルーチンを含めましたのでお役立て下さい。

尚、この理論解はリングを対象としていますが、 $E$  を  $E/(1-\nu^2)$  に差替えることにより円筒の断面として扱うことが出来ます。詳細は曲りはりに関する従来の見解 \*\*\* を参照して下さい。

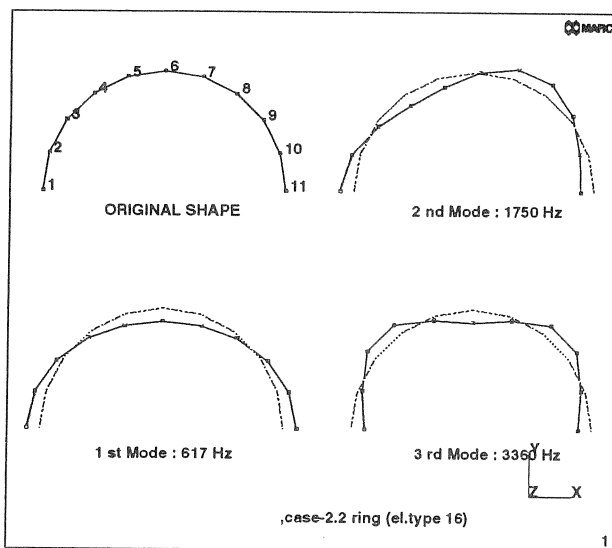


Fig. 2-2 リングの面内振動

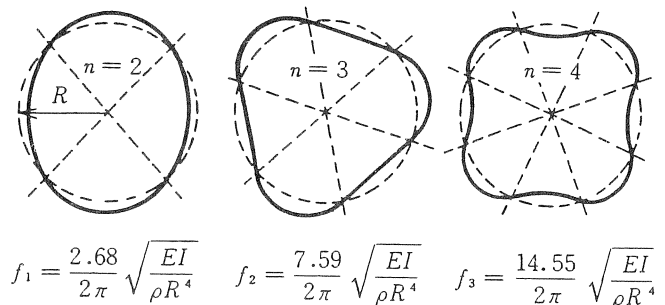


Table 2-2 固有振動数 [Hz]

	理論解	タイプ 5	タイプ 16	タイプ 52
1次	616	449	617	623
2次	1740	1340	1750	1760
3次	3340	2680	3360	3380

\* MARC プログラムは日本マーク株式会社殿の製品です。

\*\* 機械工学便覧, 新版, pp.A 3-51 ~ A 3-54, 日本機械学会, 1992.

\*\*\* 例えば、W.C. Young, "Roark's Formulas for Stress and Strain", 6th Ed., p. 262, McGraw-Hill, 1989.

表紙：飛行船 LZ-129 ヒンデンブルグ号 (ドイツ) のアルミニウム製骨格。ゴム布を外皮として被覆し、内部に複数の気室を設置。1936 年完成、1937 年 5 月 6 日 ニューヨーク、レークハースト空港にて炎上喪失。全長 245m, 水素容量 20 万  $\text{m}^3$ 。 ("Luftverkehr", Deutsches Museum, 1990. より引用)