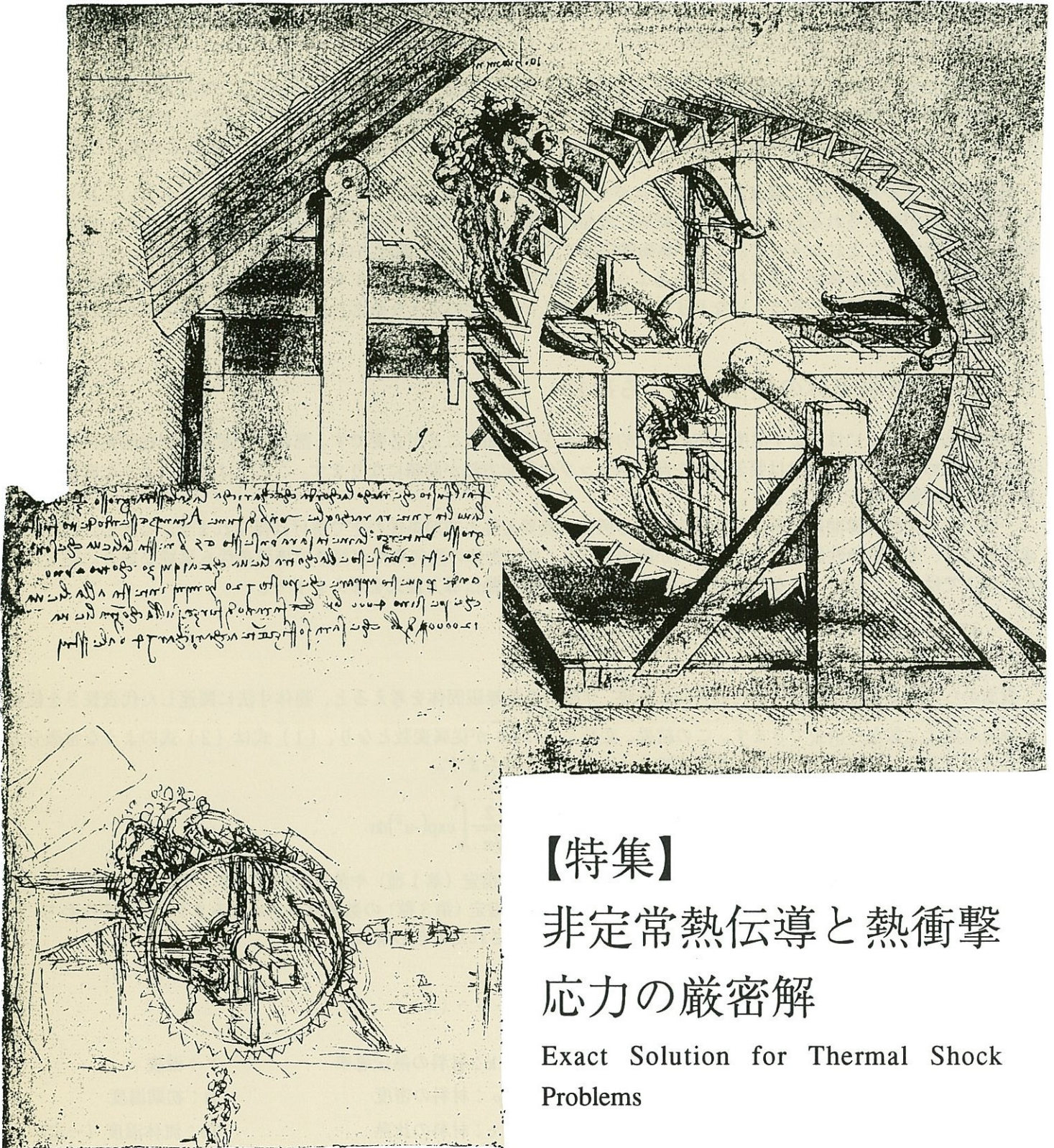


# Mech D & A News

Mechanical Design And Analysis Co.

December 1995



## 【特集】

### 非定常熱伝導と熱衝撃 応力の厳密解

Exact Solution for Thermal Shock  
Problems

近刊の号では樹脂成形などの分野に役立てるよう、粘性の効果に注目した解析例を紹介して参りました。今回はオーソドックスな問題に立戻り、熱衝撃について検討した例題を取上げます。

## 【特集 1】非定常熱伝導の厳密解

### 1.1 非定常熱伝導と熱衝撃応力

構造物に加わる荷重は機械的な荷重と熱的な荷重に大別できます。このうち熱的な荷重とは、構造物の内部に温度差が与えられることを指します。この温度差により、部位によって熱膨張量には差を生じます。ところが、各部分はそれぞれ自由に膨張したいにもかかわらず、互いの剛性によって拘束しあうため、バランスした応力状態（変形状態）で釣り合わざるを得ないこととなります。これが熱応力です。

熱せられたガラスの板を水で冷却する場面を想定して下さい。ガラスの板厚が小さいか、また熱伝導率が大きい、あるいは表面の熱伝達率が小さければ、ガラスの内部の温度差は小さく、従ってガラスは温度一様のまま冷却されます。このときはガラスの内部に応力は発生しないことに注意して下さい。伝熱工学の分野では、これを準定常の扱いと呼びます。

材料強度の面からは内部に温度差がある場合が当然問題になります。すなわち、内部が高温に保たれているにもかかわらず表面だけが冷却される状況です。この結果、表面は収縮したいにもかかわらず内部がそれを妨げるので、表面には引張応力が発生することになります。これが熱衝撃応力です。表面と内部の温度差は、当初は0で、その後ピークに達し、更に時間の経過と共に全体が一様に冷却されるようになるので再び減少します。すなわち、熱衝撃応力は冷却過程の初期において発生し、後に減衰することになります。どのタイミングでどのような熱応力が発生するのかを知るのが、熱衝撃解析のポイントです。

### 1.2 半無限固体の熱伝達による冷却

熱衝撃応力を知るには、まず温度分布の時間的変化を正確に知ることが必要です。部材の表面近くで短時間に生ずる温度分布を求めるので、FEMでは要素分割や時間ステップの設定方法が問題になります。ここでは以下のような厳密解を対象として検証解析を行ってみます。

一般に非定常熱伝導問題の解は熱伝導方程式を所定の境界条件と初期条件の下で解けば得られます。しかし、厳密解が求まるのは、主に熱物性値が一定で方程式が線形であり、かつ物体の幾何条件が簡単で境界条件も単純な場合に限られます。ここでは(1)式のような発熱のない次元直交座標系の熱伝導方程式を考えます\*\*。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \dots \dots (1)$$

表面からの冷却を理想化して、内部方向に無限、すなわち半無限固体を考えると、物体寸法に関連した代表長さを位置と時間の無次元数から消去できます。この結果、変数  $\xi = x/2\sqrt{at}$  が従属変数となり、(1)式は(2)式のような常微分方程式となります。この(2)式は(3)式のような基本解を持ちます。

$$\frac{d^2 T(\xi)}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dT(\xi)}{d\xi} = 0 \quad \dots \dots (2) \quad T = \text{erfc}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-u^2) du \quad \dots \dots (3)$$

初期温度が  $T_i$  の半無限固体に対して、表面の境界条件を温度指定(第1種)や熱流束指定(第2種)として解を求めた例は一般の参考書に多くあるので、ここでは次のような熱伝達指定(第3種)の数値解を求めてみましょう。すなわち、初期温度  $T = T_i$  として、 $T = T_0$  の流体から熱伝達率  $\mu$  で表面が冷却されたときの解は、

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i} = \text{erfc}(\xi) \cdot \left[ \exp\left(\frac{\mu x}{k} + \frac{\mu^2 at}{k^2}\right) \right] \times \left[ \text{erfc}\left(\xi + \frac{\mu\sqrt{at}}{k}\right) \right] \quad \dots \dots (4)$$

ここで、 $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$  : 誤差関数

$\xi = x/2\sqrt{at}$  : 従属変数

$x$  : 表面からの距離

$\mu$  : 熱伝達率

$k$  : 材料の熱伝導率

$\rho$  : 材料の密度

$c$  : 材料の比熱

$a = k/\rho c$  : 材料の温度伝導率

$T$  : 温度

$T_i$  : 初期温度

$T_0$  : 流体温度(一定)

誤差関数 erfc の計算は厄介ですが、ここでは手軽な近似式を使用します。\*\*\*

$$\text{erfc}(x) = 1 / [1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6]^{16} \dots (5)$$

$A = 7.052308E-2$        $C = 9.270527E-3$        $E = 2.765672E-4$   
 $B = 4.228201E-2$        $D = 1.520143E-4$        $F = 4.30638E-5$

### 1.3 解析結果

解析例として、ガラスの円板を水中で急冷する問題を検討します。この問題には、後に示すような熱衝撃応力の理論解が得られています。円板は両側の面から冷却されるのですが、熱衝撃が問題となる初期においては内部は冷却されず、半無限固体として扱えるので、(4)式をそのまま適用できます。FEM (MARC\*) のモデルは Fig. 1-1 に示す通りです。円板の中心軸まわりについて肉厚 2 h の半分を取出し、軸対称要素でモデル化しました。

モデル全体に初期温度 100℃を与えた後、Fig. 1-1 の右側端面から流体温度 0℃で冷却させます。これだけでは何の変哲もない解析なのですが、MARCの実行と同時に(4)式の理論解を計算させてみました。モデル内の各積分点位置では、解析ステップの各時点で任意の計算を行わせて、これをポストファイルに出力できます。これにはユーザ・サブルーチン PLOTV を使用します。PLOTV の中でその積分点の位置 x と時刻 t から (4) 式、(5) 式を計算し、温度 T の理論解を求めてポストファイルに出力させました。

Fig. 1-2~Fig. 1-4 に t = 0.5, 1, 3 sec における X 方向 (板厚方向) の温度分布を示します。図中には理論解と FEM 解を比較して示しました。t=1sec 程度までは両者はほぼ完全に一致します。この種の問題では、冷却によって温度が変化する表面からの深さはほぼ  $\delta = \sqrt{12at}$  で求まることが知られています\*\*。モデルの深さ h=1.5mm を  $\delta$  として t を求めると、今回の条件では t=0.83sec となります。すなわち、t=0.83sec 以下ではこの問題は半無限固体と同一として扱うことが可能です。実用的にもこのような近似は有効でしょう。

この問題では中間節点のある高次要素を適用し、板厚方向を 10 分割としました。後続の熱応力解析での精度を考慮しても、少なくとも 5 分割程度とすれば数%以下の誤差で解析できるでしょう。熱応力解析で弾塑性やクリープを考慮する場合でもこの程度の分割で問題ありません。尚、高次要素は急激な熱衝撃の問題で温度分布が振動する可能性があると言われていますが、工業的に現実的な条件下 (後述のピオ数で定まります) ではあまり問題となることはないようです。表面近くで温度分布の振動が現れた時は、まず MENTAT\* 等のポスト処理の内外挿誤差を疑ってみて下さい。尚、低次要素を適用する場合は、板厚方向に 10~15 分割程度は必要です。この種の問題では高次要素の適用を推奨します。

#### 解析条件

$k = 0.5 \text{ kcal/m hr } ^\circ\text{C}$        $\rho = 3.087E-6 \text{ kg/mm}^3$        $\mu = 1000 \text{ kcal/m}^2 \text{ hr } ^\circ\text{C}$        $T_i = 100^\circ\text{C}$        $2h = 3 \text{ mm}$   
 $= 1.389E-7 \text{ kcal/mm sec } ^\circ\text{C}$        $c = 0.2 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$        $= 2.778E-7 \text{ kcal/mm}^2 \text{ sec } ^\circ\text{C}$        $T_0 = 0^\circ\text{C}$

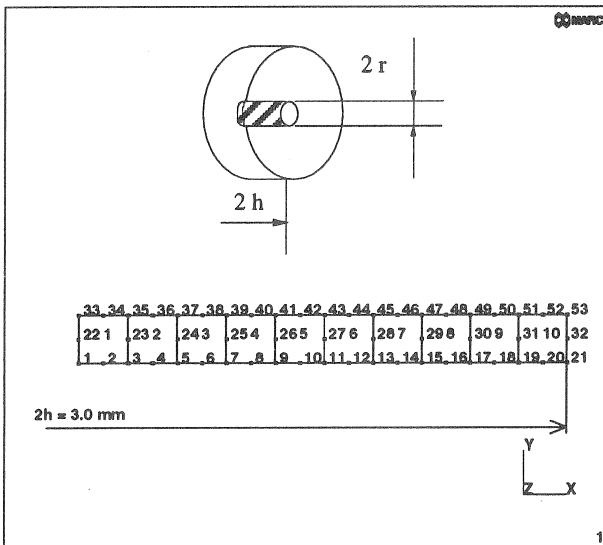


Fig. 1-1 円板の部分モデル

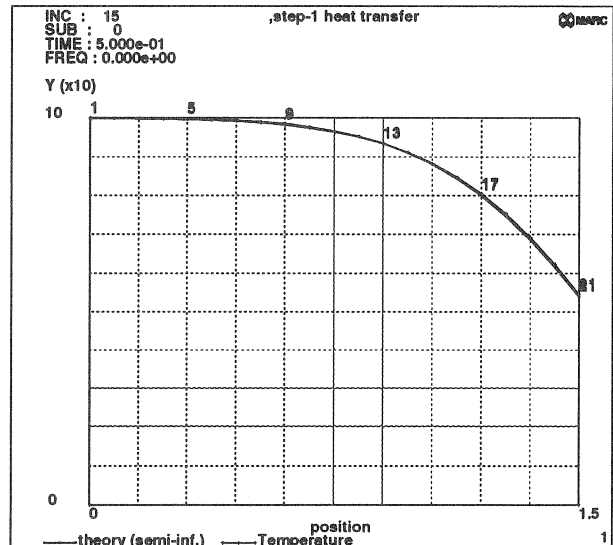


Fig. 1-2 温度分布 (t=0.5sec)

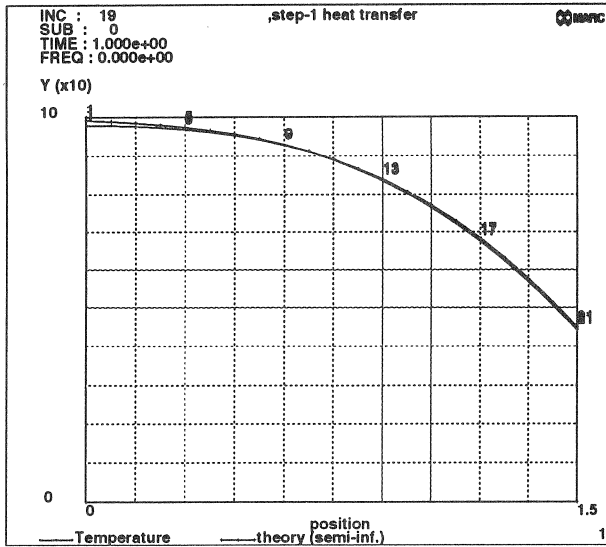


Fig. 1-3 温度分布 (t=1sec)

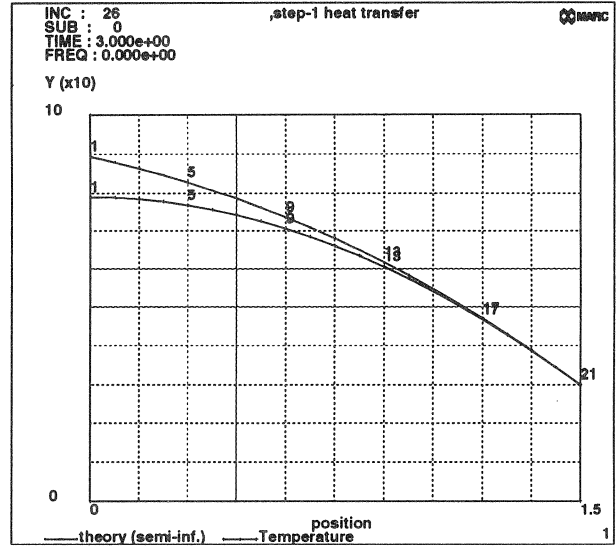


Fig. 1-4 温度分布 (t=3sec)

## 【特集 2】 熱衝撃応力の厳密解

### 2.1 円板の熱衝撃応力

先の円板の冷却の問題に対しては、機械工学便覧に以下のような理論解が与えられています\*\*\*\*。

e. 円板の熱衝撃 (thermal shock)<sup>(100)</sup> 一様な初温度  $T=0$  にあった広い円板が一定温度  $T_0$  の媒質中に投入され、両表面から急速に加熱または冷却されると、円板には時間と共に急速に変化する板厚方向の温度こう配を生じ、非定常の熱応力が発生する。この熱応力は各瞬間とも板表面において最大で、板の中央面にはそれと逆符号の応力が発生する。いずれも投入後少時を経て最大値に達し、その後はゆるやかに低下する。この熱衝撃応力は、無次元応力  $\sigma^*$  を用いて

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \{\alpha E T_0 / (1 - \nu)\} \sigma^*$$

で与えられ、表面の  $\sigma^*$  は図 109 のような時間的変化を呈する。ここに、 $\beta = h\mu/k$  : ビオの係数、 $2h$  : 板厚、 $\mu$  : 板表面における熱伝達率、 $k$  : 板材料の熱伝導率、 $\rho$  : 材料の密度、 $c$  : 材料の比熱、 $t$  : 時間。

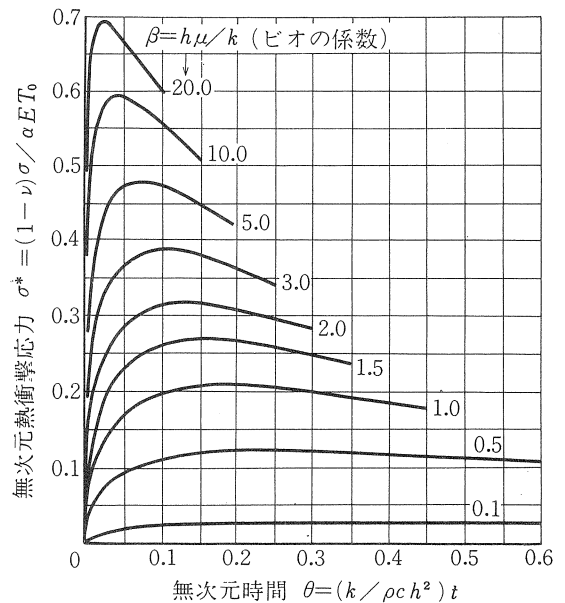


図 109 円板表面の熱衝撃応力

この中で重要なのはビオ数  $\beta$  という無次元数です。これは材料内部の温度変化の、流体温度に対する追従性を評価する量です。厳密な議論は難しいのですが、 $\beta = 0.1$  以下であれば準定常、すなわち材料内の温度分布はほぼ一様と仮定できると言われています\*\*。上の図 109 を見ても、この  $\beta = 0.1$  以下の領域では熱衝撃応力の発生は平坦であり、強度評価上の問題は小さいと考えることができます。

先の熱伝導解析では実用のガラスに近い条件を使用しましたが、 $\beta = 3.0$  となるように値を調整してあります。尚、熱応力解析に適用する条件は、以下の通りです。

$$E = 7000 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu = 0.3, \quad \alpha = 1.0 \text{ E-}5 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

## 2.2 解析結果

先の熱伝導解析で得られた温度のデータを、ポストファイルから順次呼び出し、時刻を追って熱応力解析を行いました。MARCではCHANGE STATEとAUTO THERMというオプションを使用します。通常MARCの実行では熱伝導解析の経過時間を熱応力解析で参照することはできないのですが、ここではポスト処理で工夫してこの経過時間を取込みました。Fig. 2-1は、経過時間に対して表面温度をプロットした結果を示します。t=5secで100℃から約20℃まで冷却されることがわかります。

Fig. 2-2はt=1secにおける変形モードを示します。実線が変形後の形状です。外表面付近で局所的な収縮を生じていることがわかります。尚、図中Y（半径方向）の変位は、一様となるように拘束し、半径が無量大であることをモデリングしている点に注意して下さい。

Fig. 2-3は半径方向と円周方向の応力の時間的変化を示します。先に示した図109の $\beta=3.0$ の曲線に相当する図です。今回の条件では、無次元化した応力と時間が $\sigma^*=0.1\sigma$ となるように材料定数を設定したので、Fig. 2-3を0.1倍に縮尺すると図109のスケールに一致します。両者は良く一致し、t=1secで応力の最大値約3.8kg/mm<sup>2</sup>を示すことがわかります。

- \* MARC・MENTATは日本マーク株式会社製の製品です。
- \*\* 日本機械学会，伝熱工学資料改訂第4版1986., pp.6~10.
- \*\*\* C. Hasting, Appoximations for Digital Computers, Princeton, 1955., sheet No.63. (例えば，森口他，数学公式III，岩波書店，1987., p.81.)
- \*\*\*\* 日本機械学会，機械工学便覧（新版），1992., pp.A4-68~69.

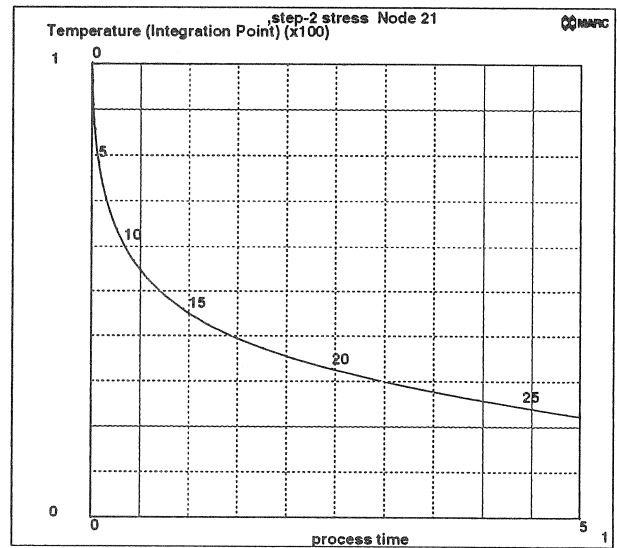


Fig. 2-1 外表面の温度変化

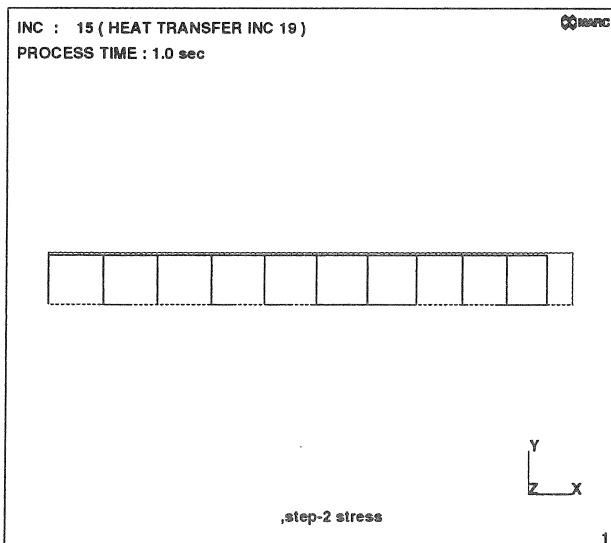


Fig. 2-2 冷却による収縮 (t=1sec)

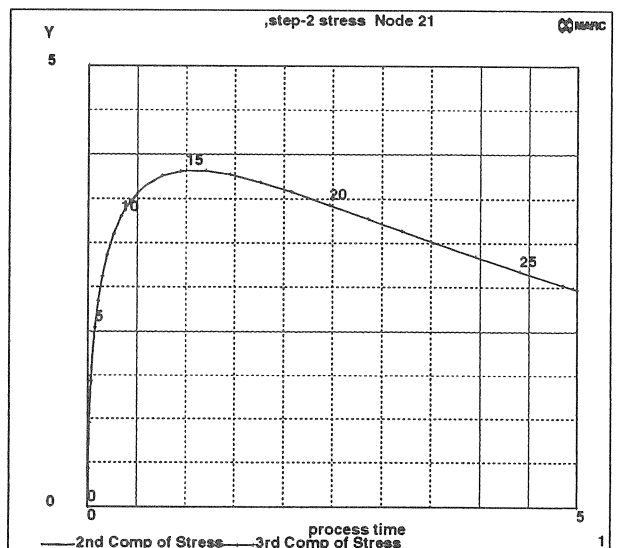


Fig. 2-3 外表面の応力の変化