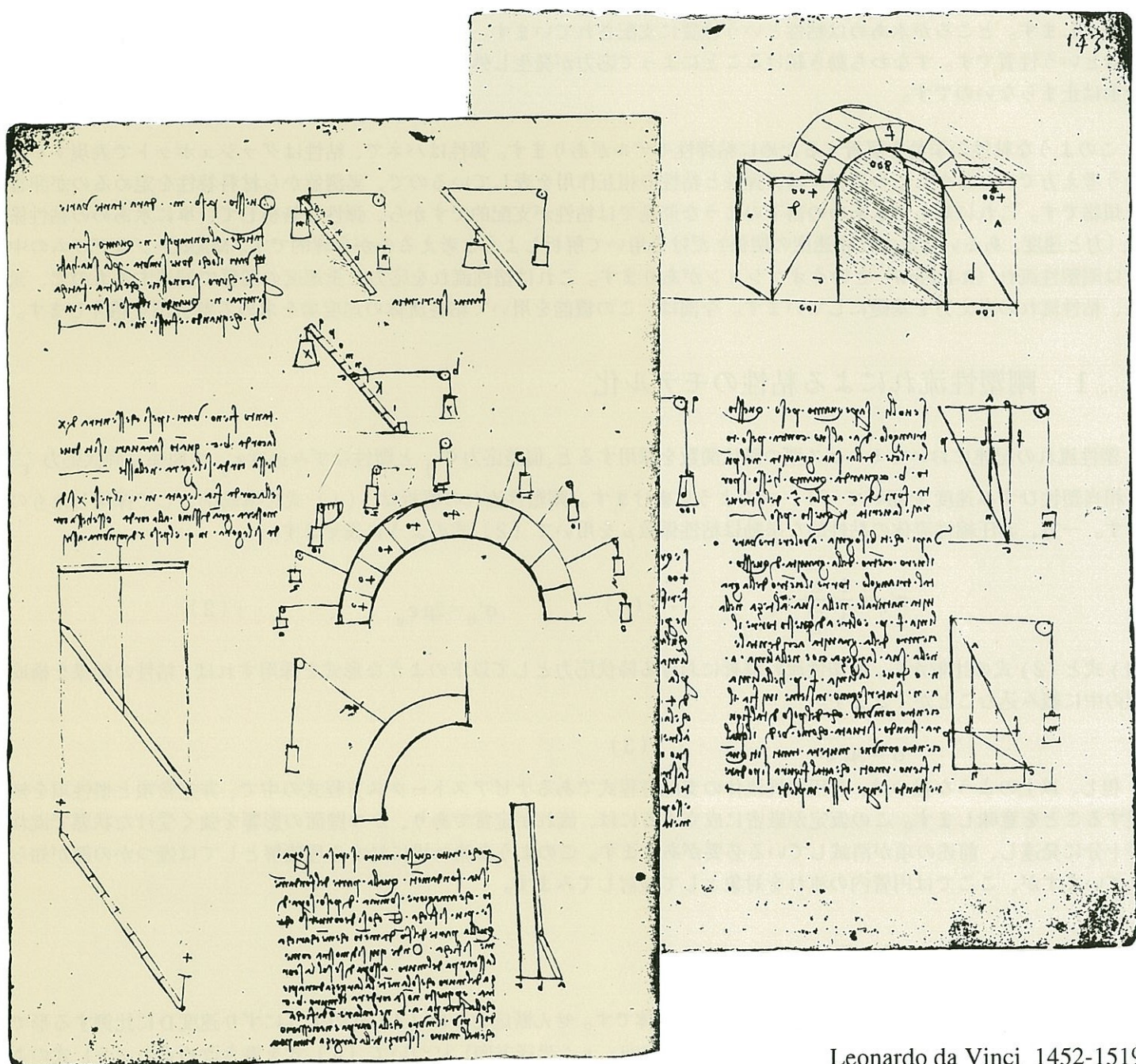


# Mech D & A News

Mechanical Design And Analysis Co.

October 1995



Leonardo da Vinci 1452-1519

## 【特集】

1. 非ニュートン流体の解析
2. 粘弾性解析の基礎モデル

Non-Newtonian Fluid  
Visco-Elastic Models

前号 vol.2 では大ひずみ粘弾性の例題をご紹介しましたが、今回は粘性のみに着目した解析を取り上げます。また、より基礎的な粘弾性解析のサンプルをあわせてご紹介いたします。

## 【特集 1】 非ニュートン流体の解析

樹脂やガラスの成形は、材料が「水あめのように伸びる」性質を利用しています。工業的な利点はともかくとして、この種の材料は、片時もじっとしていない、という始末の悪い特性を示します。通常の弾性材料ならば、力を加えると変位が発生し、同時に部材の中にはそれに対応した応力を生じて、外からの荷重に対抗します。すなわち、バランスした状態で静止します。ところが水あめは粘性という性質に支配されています。これは力に対しては、変位ではなく、速度で対抗するという性質です。すなわち動き続けることによって応力が発生し外力とバランスするので、何かで拘束されない限り変形は止まらないのです。

このような粘性の挙動を解析するために粘弾性モデルがあります。弾性はバネで、粘性はダッシュポットで表現するという考え方です。しかしこのモデルは、弾性と粘性の相互作用を表しているので、実測値から材料特性を定めるのが非常に煩雑です。これに対して水あめの落下のような問題では粘性が支配的ですから、弾性は無視して、単に水あめの粘性係数（力と速度、あるいは応力と歪速度の関係）だけを用いて解析しようとするのが合理的です。MARC\* プログラムの中には剛塑性流れ（R-P Flow）というオプションがあります。これは塑性流れを応力と歪速度の関係で記述するもので、元来、粘性流れの考え方を基礎にしています。今回は、この機能を用いて粘性流体の速度場を求める解析例を紹介いたします。

### 1.1 剛塑性流れによる粘性のモデル化

塑性流れの記述においてミーゼス型の降伏関数を採用すると、偏差応力  $\sigma'_{ij}$  と塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  の関係は降伏応力  $\bar{\sigma}$  と相当塑性ひずみ速度を用いて（1）式のように書けます。剛塑性流れの解析は、（1）式を構成則として採用したものです。一方、非圧縮性流体の粘性的な挙動は粘性係数  $\mu$  を用いて（2）式のように表せます。

$$\sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad \dots \dots (1) \quad \sigma'_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad \dots \dots (2)$$

（1）式と（2）式の比較から、剛塑性流れ解析における降伏応力として以下のような形式を採用すれば、粘性の効果を構成則の中に組み込むことができます。

$$\bar{\sigma} = 3\mu \dot{\epsilon} \quad \dots \dots (3)$$

但し、以上のような扱いは、非圧縮性流体の支配方程式であるナビヤーストークス方程式の中で、非定常項と慣性項を無視することを意味します。この仮定が厳密に成立するには、流れが定常であり、かつ壁面の影響を強く受けた状態で流れが十分に発達し、前述の項が消滅している必要があります。このような流れ場に対する理論解としては幾つかの例が知られていますが、ここでは円管内の流れを対象として検討してみます。

### 1.2 ニュートン流体

粘性流体の中で最も代表的なものがニュートン流体です。せん断応力  $\tau$  は（4）式のようにずり速度  $D$  に比例する形で表現されます。 $\mu$  は粘性係数です。円管流（ $z$ ：軸方向、 $r$ ：半径方向）について（4）式を書き改めると（5）式ようになります。（5）式は、先の（2）式のせん断成分を表したものです。式中の  $\dot{\epsilon}_{zr}$  はテンソルの定義に従っており、工学の定義の  $D = dv_z/dr$  の  $1/2$  になっていることに注意してください。

$$\tau = \mu D \quad \dots \dots (4) \quad \tau_{zr} = \mu \frac{dv_z}{dr} = 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) \approx 2\mu \dot{\epsilon}_{zr} \quad \dots \dots (5)$$

この分野を代表する R.B. Bird\*\* の著書から理論解を参照します。管内の平均流速  $\langle v_z \rangle$  は、流量  $Q$ 、円管半径  $R$ 、圧力勾配  $dp/dz$  を用いて (6) 式のようになります。Fig. 1-1 に無次元化された流速分布を示します。この図と直接比較するため、ここでは、 $R=1$ 、 $dp/dz=-1$  とし、また  $\langle v_z \rangle = -1$  となるように  $\mu = 0.125$  と設定して解析を行います。

$$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad \dots \dots (6)$$

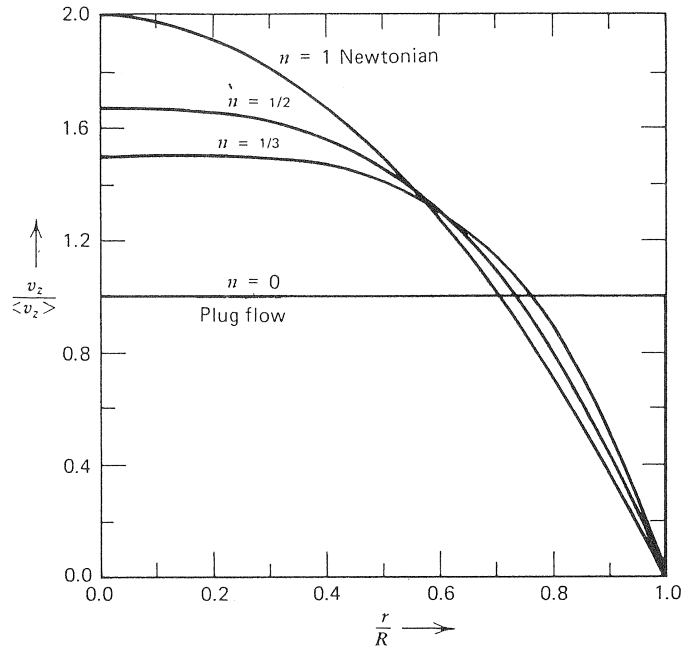


Fig. 1-1 円管内の流速分布 (理論解 \*\*)

### 1.3 非ニュートン流体

非ニュートン流体の代表的な例として、ここでは (7) 式で表されるべき乗流体を取り上げます。先に (4) 式に示したニュートン流体は、(7) 式で  $m=\mu$ 、 $n=1$  とした特別な場合に相当します。円管流について (7) 式を書き改めると (8) 式のようになります。

$$\tau = mD^n \quad \dots \dots (7) \quad \tau_{rz} = m \left( \frac{dv_z}{dr} \right) = 2m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \left( \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) = 2m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \epsilon_{rz} \quad \dots \dots (8)$$

このとき、見かけの粘性  $\tau_{rz}/\epsilon_{rz}$  が正値となるように絶対値処理が必要になる点に注意が必要です。速度分布の理論解は (9) 式の通りです。このとき、 $R=1$ 、 $dp/dz=-1$  とし、べき乗の指数として  $1/3$  を仮定します。ニュートン流体のときと同じく  $\langle v_z \rangle = 1$  となるように、 $m=0.27516$  と設定して解析を行います。

$$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R}{(1/n)+3} \left( \frac{R}{2m} \left| \frac{dp}{dz} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots \dots (9)$$

尚、粘性の仮定の方法にかかわらず、運動方程式よりせん断応力  $\tau_{rz}$  は (10) 式を満足します。従って、上記のニュートン流体及びべき乗流体に対して得られるせん断応力の分布は同一であり、 $r=R$  すなわち壁面では (11) 式の値  $\tau_w$  となります。今回は  $R=1$ 、 $dp/dz=-1$  であるので、 $\tau_w = -0.5$  となることを確認します。

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) \quad \dots \dots (10) \quad \tau_w = \frac{1}{2} R \frac{dp}{dz} \quad \dots \dots (11)$$

### 1.4 解析結果

メッシュ分割を Fig.1-2 に示します。円管内の流体部分を軸対称要素でモデル化しました。半径方向10分割、軸方向1分割のモデルです。流体は円管内壁に付着しているため、外径部における軸方向速度は0とします。またモデルの側面に等分布荷重を加え、軸方向に圧力勾配が発生するようにしました。粘性の評価は、ニュートン流体、非ニュートン流体共に (3) 式の等価則を満足するよう、ユーザ・サブルーチン UNEWTN を用いて定義しました。

Fig. 1-3 に速度ベクトルと流速分布を示します。Fig. 1-1 の理論解と一致する結果が得られました。また Fig. 1-4 にせん断応力分布を示します。壁面において (11) 式の結果、すなわち  $\tau_w = -0.5$  となることがわかります。

### 1.5 粘性体の垂下解析

以上の例では、定常的な速度場を求める解析をお見せしました。この手法を時間刻みを追って順に進めれば、準定常的な扱いではありますが変形の進行を求めることができます。すなわち、速度に時間刻みを乗じて増分変位を求め、これによってモデル形状を更新するという考え方です。但し、MARCでは定常場の解析とはユーザ・サブルーチンも含めデータの相違が大きいので注意して下さい。Fig. 1-5 は、粘性体を重力によって垂下させ、壁面で受けとめる解析の結果を示します。べき乗則流体では速度勾配が厳しくなる傾向があるので、ニュートン流体に比べてくびれが大きくなる結果となりました。同時に非線形性が非常に強くなり、安定に解析を進めるのが著しく困難となりました。詳細は別売の入力データ解説を参照下さい。

\*\* R. B. Bird et al, Dynamics of Polymetric Liquids, Vol. 1, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1987.  
 R. B. Bird et al, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, 1960.

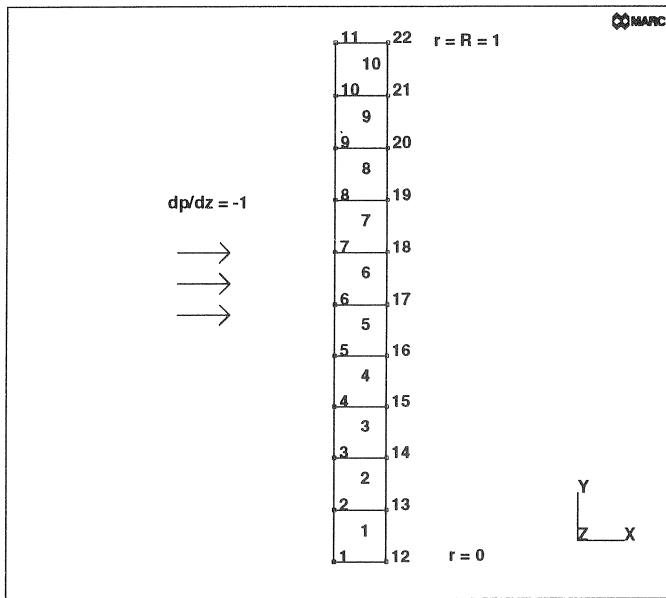


Fig. 1-2 円管内流体のメッシュ分割

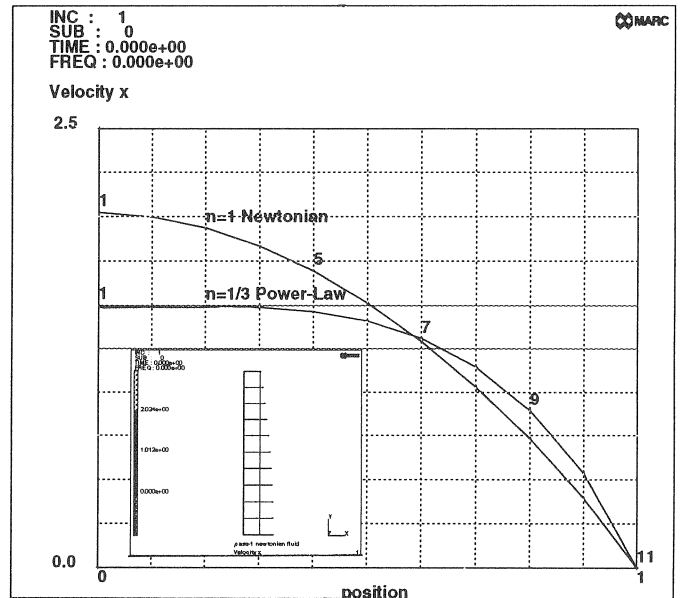


Fig. 1-3 流速分布

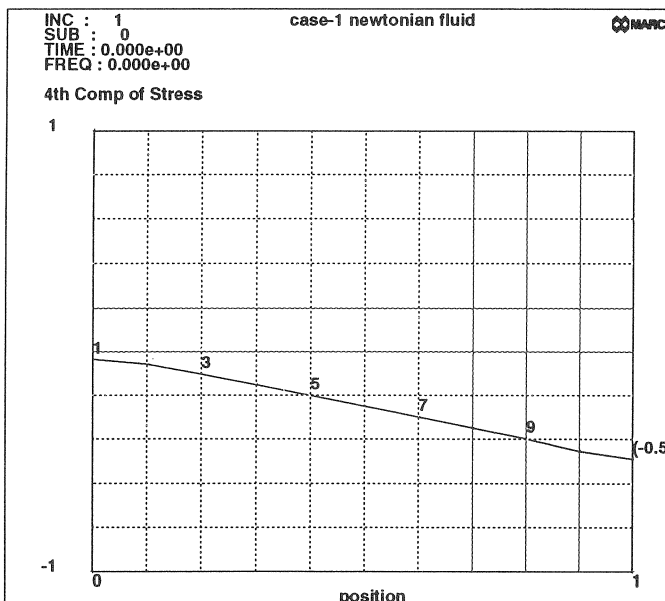


Fig. 1-4 せん断応力分布

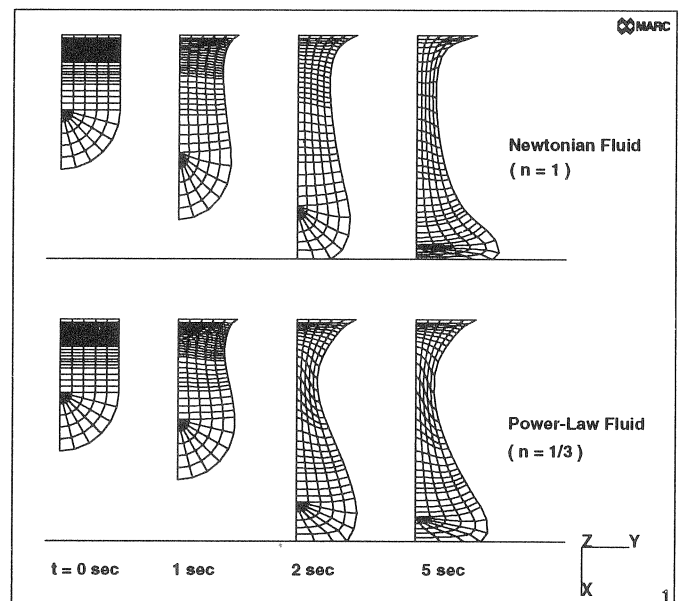


Fig. 1-5 粘性体の垂下解析

## 【特集 2】 粘弾性解析の基礎モデル

MARC\* プログラムでは、Table 2-1 に示すように各種の機能を用いて粘弾性解析を行うことが可能です。それぞれ得失はありますが、どの機能を用いても、同じ材料を表現できます。ここでは 3 要素モデルを仮定し、同一の緩和挙動を解析した例を紹介し、粘弾性解析のひな形のデータとしてご利用下さい。

### 2.1 Maxwell モデルと Voigt モデルの等価性

まず Maxwell モデルに瞬間的に伸びを与え、それを一定に保持する条件を考えます。瞬間的にはダッシュポットは剛で変形を生じないので、2 本のバネ  $E_e$  と  $E_i$  が並列 ( $E_e + E_i$ ) で荷重を発生させます。しかし、時間の経過と共にダッシュポットが伸び、バネ  $E_i$  の荷重は時間  $t = \infty$  で 0 まで低下します。このダッシュポットの時間的な特性を示すのが粘性係数  $\eta_{ri}$  (あるいは緩和時間  $T_{ri}$ ) です。 $T_{ri}$  はいわゆる一次遅れ系の時定数であり、今回の例では  $E_i$  で発生していた荷重が  $1/e$  に低下するまでの時間を表します。この緩和の過程を式で表すと (1) 式のようにになります。ここでは変位が一定なのでこのバネ定数の変化の式は荷重の変化を表すことになります。

一方、Voigt モデルには一定の荷重を加えて保持する条件を考えます。バネは、バネ定数の逆数すなわちコンプライアンス  $C_g$  および  $C_i$  で表します。荷重が一定なので、コンプライアンスは直接、変位を表すことになります。先程と同様、 $t=0$  ではダッシュポットは剛であるので、変位はバネ  $C_g$  においてのみ発生します。時間の経過とともにダッシュポットは伸び、 $C_i$  が  $C_g$  と同じ荷重を発生する変位になるまで伸び続けます。すなわち  $t = \infty$  ではダッシュポットが受け持つ荷重は 0 になります。このようなクリープ型の変位応答は (2) 式のように表されます。

$$E(t) = E_e + E_i \exp(-t/T_{ri}) \quad \dots \dots (1) \quad C(t) = C_g + C_i [1 - \exp(-t/T_i)] \quad \dots \dots (2)$$

(1) 式及び (2) 式はモデル化こそ異なるものの、等価となるように定数を選べば同じ材料を表現することができます。今回のような 3 要素モデルの場合、等価となる定数間の関係は以下のようにになります。 (\*\* pp. 14~18)

$$E_e = T_{ri} / (T_i C_g), \quad E_i = 1 / C_g - E_e, \quad T_{ri} = T_i / (1 + C_i / C_g) \quad \dots \dots (3)$$

今回の解析では、(3) 式を満足するような以下の数値を採用し、各種モデルの比較を行いました。

$$\text{Maxwell} : E_e = 6, \quad E_i = 4, \quad T_{ri} = 0.1 \quad \dots \dots (4)$$

$$\text{Voigt} : C_g = 0.1, \quad C_i = 0.06667, \quad T_i = 0.1667 \quad \dots \dots (5)$$

### 2.2 多軸場への拡張

以上の検討は単軸下の挙動を前提にしました。これを多軸場に拡張し MARC の入力データとするには、材料を等方性としても、せん断変形と体積変形の両方について材料定数を与える必要があります。この手順はやや煩雑 (\*\* pp. 230~239) ですが、Table 2-1 のように粘性的挙動がせん断成分に限られるとして、結果だけを示すと以下のようにになります。まず、Maxwell モデルについて各成分に対する緩和関数は、

$$G(t) = G_e + G_i \exp(-t/T_i), \quad K(t) = K_e \quad \dots \dots (6)$$

ここで、(1) 式との対応は以下の通りです。(4) 式の数値を代入すると、

$$G_e = E_e / 3 = 2, \quad G_i = E_i / 3 = 1.333, \quad T_i = T_{ri} = 0.1 \quad \dots \dots (7)$$

また、Voigt モデルについて各成分に対するクリープ関数は、

$$C_G(t) = C_{gG} + C_{iG} [1 - \exp(-t/T_{iG})], \quad C_K(t) = C_k \quad \dots \dots (8)$$

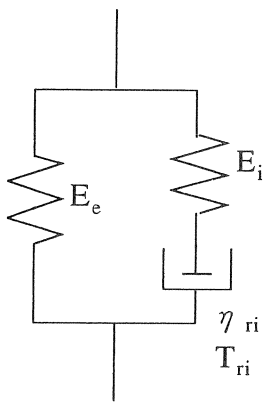
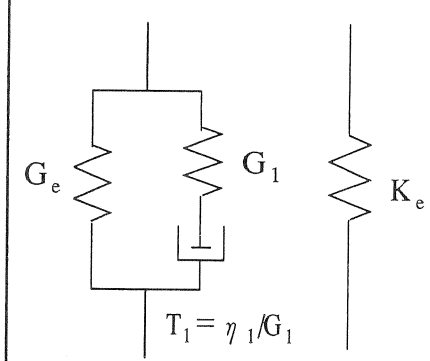
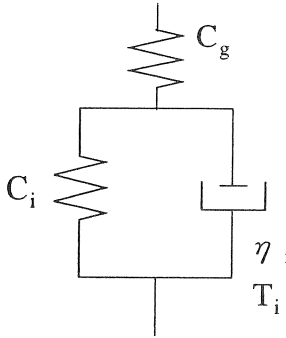
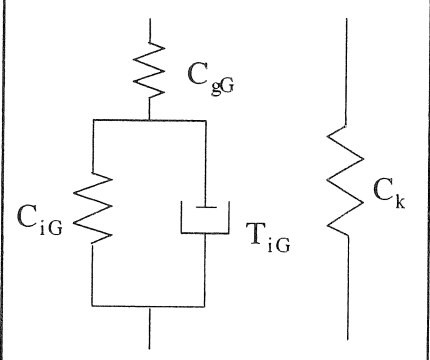
ここで (2) 式との対応は以下の通りです。(5) 式の数値を代入すると、

$$C_{gG} = 3C_g = 0.3, \quad C_{iG} = 3C_i = 0.2, \quad T_{iG} = T_i = 0.1667 \quad \dots \dots (9)$$

尚、 $t=0$  における瞬間的な弾性値は以下の通りです。

$$G = G_e + G_i = 1 / C_{gG} = 3.333, \quad \nu = 0.5 \text{ (非圧縮)}, \quad E = 2(1 + \nu)G = 10 \quad \dots \dots (10)$$

Table 2-1 MARC の粘弾性解析機能

No	モデル	微小ひずみ	大ひずみ	DYNAMIC	せん断および体積成分による表示
1	Maxwell モデル (応力緩和型) 	VISCEL PROP	—	適用可	 せん断                      体積 $T_1 = \eta_1 / G_1$
2		—	VISCEL MOON	音速	
3		—	VISCEL OGDEN	$a = \sqrt{\frac{E_e + E_i}{\rho}}$	
4		—	—	SPRINGS (SPRING + DASHPOT)	
5	Voigt モデル (クリープ型) 	CRPVIS	—	不可 a = ∞となる 場合有	 せん断                      体積

### 2.3 試験片の数値解析

以上に述べたモデル、すなわち Table 1 の No.1~No.5 について (1) 式に相当する単軸試験片の応力緩和解析を行いました。要素タイプには4 辺形軸対称要素 (タイプ 10 または 8 2) を使用し、長さ、断面積が共に 1 のモデルを 1 要素で作成しました。

Fig. 2-1 は、この試験片に工学ひずみ 0.1 を与え一定に保持したときの応力の緩和曲線を示します。(1) 式と (4) 式から、このときの公称応力は (6+4) × 0.1=1 から低下を始め、4/(6+4) = 0.4 だけ減少するまで緩和時間 0.1 で漸減することがわかります。Fig. 2-1 はこの (1) 式に一致します。全てのケースについて同一の結果が得られました。

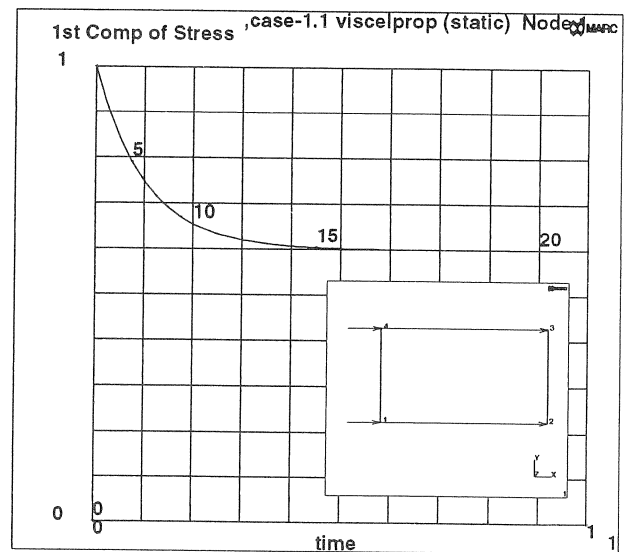


Fig. 2-1 単軸試験片の応力緩和

\*\* 山田, 塑性・粘弾性, 培風館, 1994 (第 6 版)

\* MARC プログラムは日本マーク株式会社製の製品です。