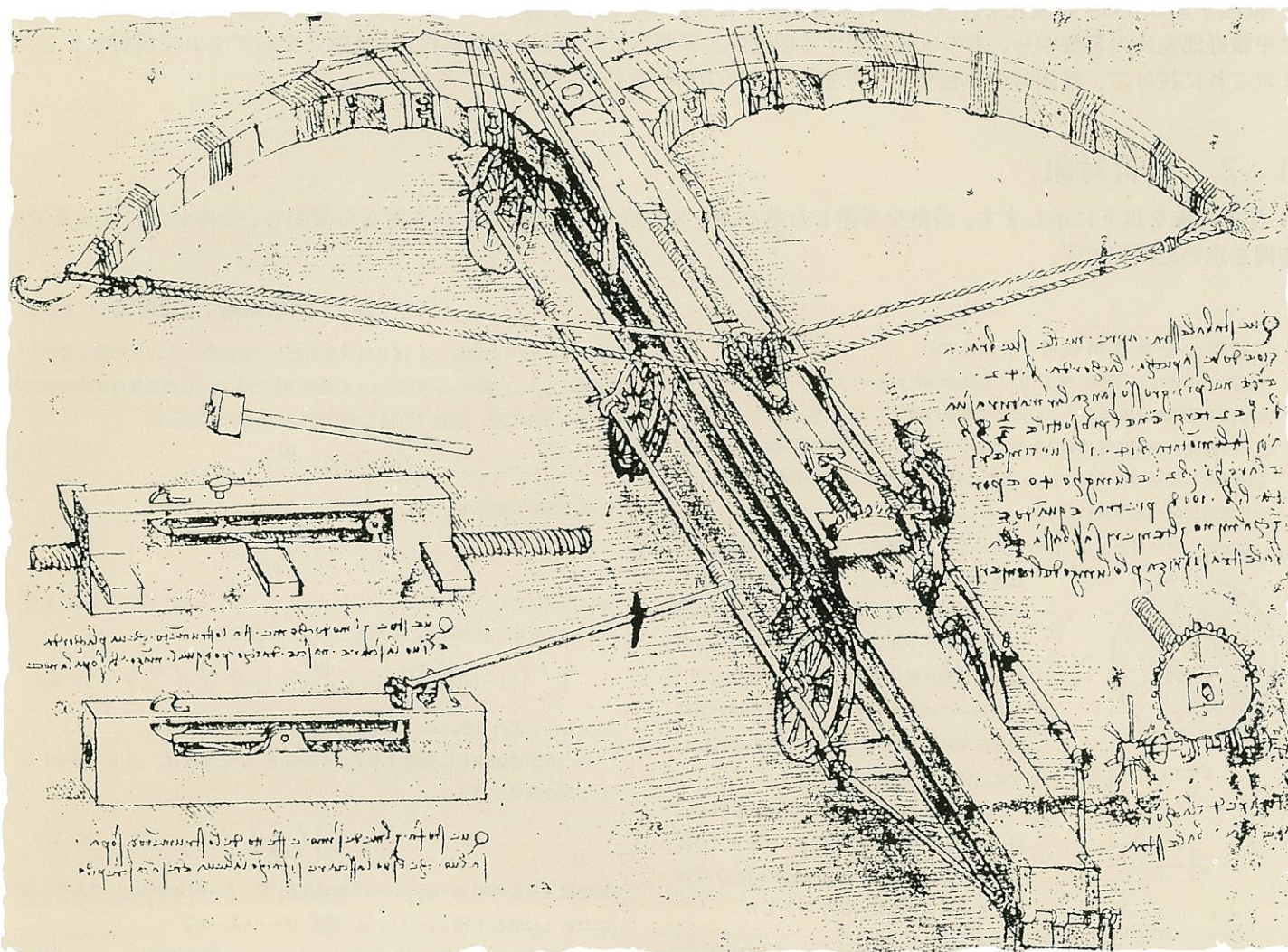


Mech D & A News

Mechanical Design And Analysis Co.

August 1995



【特集】 1. 凝固プロセスの解析

Solidification Process of Ice

2. 大ひずみ粘弾性球の衝突解析

Dynamic Contact of Large-strain
Visco-elastic Sphere

弊社は昨年12月の設立以来、構造解析を中心にコンサルティング業務を進めて参りました。お蔭様をもちまして業容は順調に推移し、この8月には株式会社に変更致しました。これも一重に皆様のお引き立ての賜物と厚く御礼申し上げます。今後共、宜しくお願い申し上げます。

【特集1】 凝固プロセスの解析

1.1 はじめに

凝固プロセスは、相変化を伴う伝熱や体積変化を含む複雑な過程であり、モデリングが非常に難しい問題です。ここでは甲藤好郎先生の著書から、氷の生成に関する理論解を参照させて頂き、伝熱過程をMARC*プログラムで解析しました。またこれに続けて、凝固時の体積変化を考慮した熱応力解析を行った例を示します。

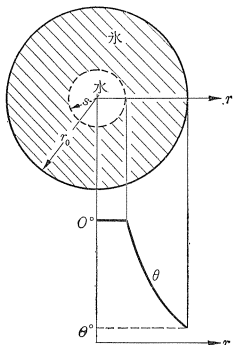
1.2 解析対象

解析対象を以下に示します。潜熱を考慮した熱バランスを解き、容器内の水が表面から凝固し、全体が氷になるまでの時間を求めた問題です。

甲藤, 伝熱概論, 養賢堂, 1978.

相変化を伴う熱伝導 (氷の生成)

凝固, 沸騰など界面に相変化 (change of phase) を伴う物体の熱伝導もしばしば問題になる. ここにはごく簡単な例として, 0°C の水を入れた容器の壁温を氷点下を保つ場合を考えよう. 氷の生長に伴って移動する水との界面は常に氷点 0°C に保たれ, そこに発生する凝固熱は水中の熱伝導によって低温壁面の方へ流れ去る.



2-16 図 円筒容器内の氷の生成

相変化の潜熱が大きく, かつ壁温が氷点より極端に低くない時は界面の移動速度は余りはやくない. 僅かの界面移動でも多くの熱量を発生するに反し, 熱伝導で除かれる熱量が少ないからである. 従って瞬間瞬間の界面位置に対する水中の温度分布は, 界面がそこに静止していると考えた時の定常温度分布にはきわめて近くなるから下記のよう近似の取扱いが出来る.

例として2-16図の半径 r_0 の円筒容器の壁温を $\theta_0^\circ\text{C}$ に保つ場合を考える. 氷と水の界面の半径が s の時, 水中の定常温度分布は(2-2)式をその直前の式へ代入して

$$\theta = \theta_0 \frac{\ln(r/s)}{\ln(r_0/s)} \quad (2-35)$$

さて時間 dt の間の界面半径の変化を ds (減少のため $ds < 0$) とすれば

$$-\rho L \cdot 2\pi s ds = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_{r=s} \cdot 2\pi s dt$$

凝固による発生熱量 界面から熱伝導で除去される熱量

ここに ρ は氷の密度, L は単位質量あたりの凝固熱, λ は氷の熱伝導率, $(d\theta/dr)_{r=s}$ は界面 ($r=s$) における温度勾配である. この熱量の釣合の式に(2-35)式を代入, 整理すれば界面の移動に関し次式を得る.

$$s \ln \frac{r_0}{s} \cdot ds = \frac{\lambda \theta}{\rho L} dt$$

これは容易に積分できて

$$s^2 \left[1 - \ln \left(\frac{s}{r_0} \right) \right] = 4 \frac{\lambda \theta}{\rho L} t + C$$

氷は円筒面から生長を開始するから $t=0$ で $s=r_0$ として積分常数 C を定めれば, 界面半径の時間的な変化が次のように定まる.

$$\left(\frac{s}{r_0} \right)^2 \left[1 - \ln \left(\frac{s}{r_0} \right) \right] = 1 + 4 \frac{\lambda \theta}{\rho L r_0^2} t = 1 + 4 \left(\frac{c\theta}{L} \right) \left(\frac{\kappa t}{r_0^2} \right) \quad (2-36)$$

ただし c : 氷の比熱, κ : 氷の温度伝導率 ($\kappa \equiv \lambda/c\rho$) である.

特に氷が容器中心に到達するまでの時間を t_0 とすれば, 上式で $s \rightarrow 0$ として次の関係を得る.

$$\frac{\kappa t_0}{r_0^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{L}{c\theta} \right) \quad (2-37)$$

氷では $\kappa = 0.0041 \text{ m}^2/\text{hr}$, $c = 0.5 \text{ kcal}/\text{kg}_m^\circ\text{C}$, $L = 80 \text{ kcal}/\text{kg}_m$ である. 故にたとえば容器半径 $r_0 = 0.01 \text{ m}$, 壁温 $\theta = -5^\circ\text{C}$ の時

$$t_0 = \frac{(0.01)^2}{0.0041} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{80}{0.5 \times 5} \right) = 0.195 \text{ hr} = \boxed{11.7 \text{ 分}}$$

本節に記した方法は $|L/c\theta| \gg 1$ で正しいが*, 実用上の問題に対しほぼ $|L/c\theta| > 1$ の範囲で近似的に適用できる.

1.3 解析結果

Fig.1-1 にメッシュ分割を示します。水は半径10mmの円筒容器に入っているものとし、軸対称要素でモデル化しました。理論解では $t=0$ で水の外縁温度を -5°C としていますが、実用的な拡張ができるように、ここでは伝熱界面の要素を介して外側に鋼製容器のメッシュを設けました。すなわち水と容器にそれぞれ初期温度を与え、伝熱界面の要素に熱伝達率 (例えば CONRAD GAP オプション) を設定するといった現実的なモデリングが可能になるようにしています。

Fig.1-2 は理論解と同じ条件により温度分布を解析した結果です。TEMPERATURE EFFECTS オプションで潜熱と温度依存の物性を入力し、 $-0.2 \sim 0^\circ\text{C}$ の温度範囲で相変化が起こるものとししました。時間を追って氷 (0°C 未満) の領域が容器の中心に向かって広がり、702秒=11.7分で全て氷となります。これは理論解とほぼ完全に一致する結果です。

この温度分布解析の結果を用いて熱応力解析を行いました。氷はほぼ非圧縮とし、相変化の温度領域でヤング率を氷の値に立ち上げます。また同時に3%の体積膨張を生ずるように熱膨張係数を操作しました。容器は弾塑性材料 ($S_y=20 \text{ kg/mm}^2$) とし、界面の半径方向変位を水の要素と TYING しました。

Fig.1-3 は $t=350\text{sec}$ における応力の分布です。半径4mm付近まで凝固が進み、この結果、容器は膨張して降伏しています。氷の部分ではこれと釣り合う応力が発生していますが、水の部分では応力(圧力)は発生していません。水と氷の界面の円周方向応力は不連続な挙動を示しますが、この値の真否は検討を要します。

Fig.1-4 の上側の曲線は、このときの容器半径の変化を示します。約 $t=200\text{sec}$ で材料が降伏した結果、変位は大幅に増加し、最終的に、約0.13mmの増加となります。

以上の例では体積の膨張を仮定しましたが、鑄造のようなプロセスでは凝固による収縮が問題となります。Fig.1-4 の下側の曲線は、体積変化を膨張から収縮に変更し氷の外径の変化を示したものです。このとき容器との界面の TYING は解除し、氷だけが単独で収縮するモデルとしました。

このような界面の変位の操作を自動化し、また熱伝達率にフィードバックをかければ面白い知見が得られるでしょう。この他、流れは表現できないものの、重力や蒸気圧を考慮して巣の発生を予見したり、CRACK DATA オプションを組み合わせて欠陥を表現することも可能と考えられます。以上、非常に簡単な例ですが、凝固プロセスを解析した例題です。

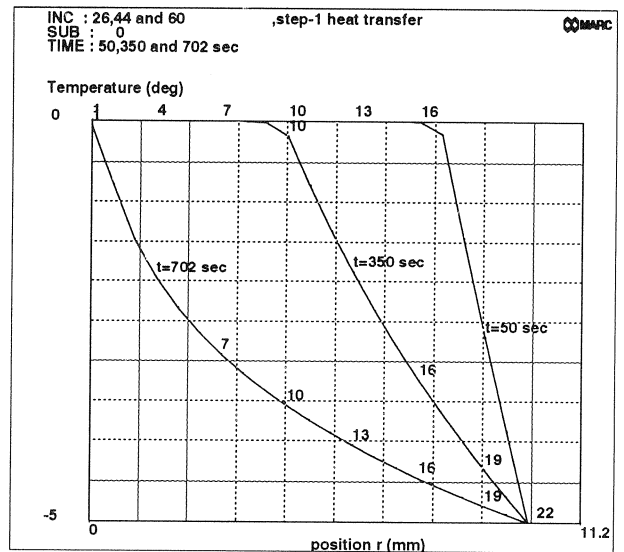


Fig.1-2 半径方向の温度分布

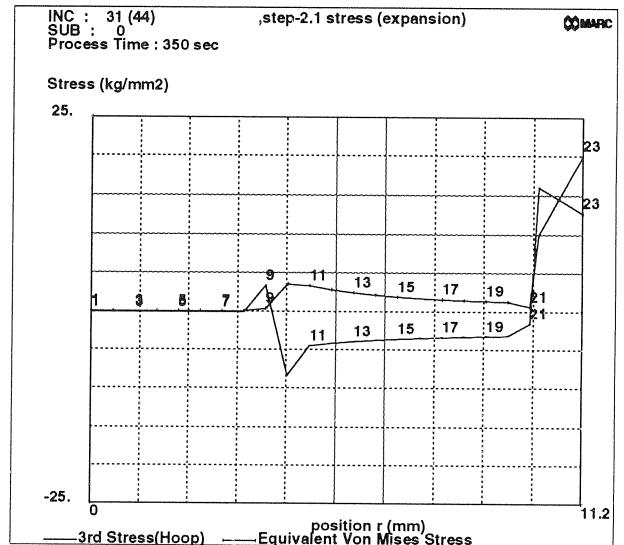


Fig.1-3 半径方向の応力分布
(凝固膨張の場合, $t=350\text{sec}$)

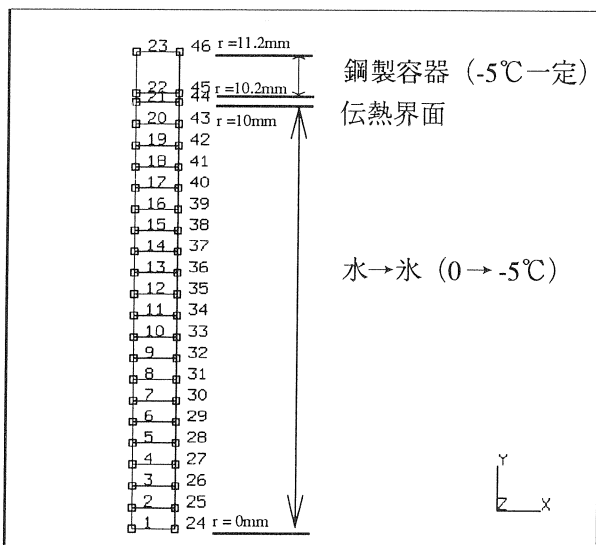


Fig.1-1 メッシュ分割

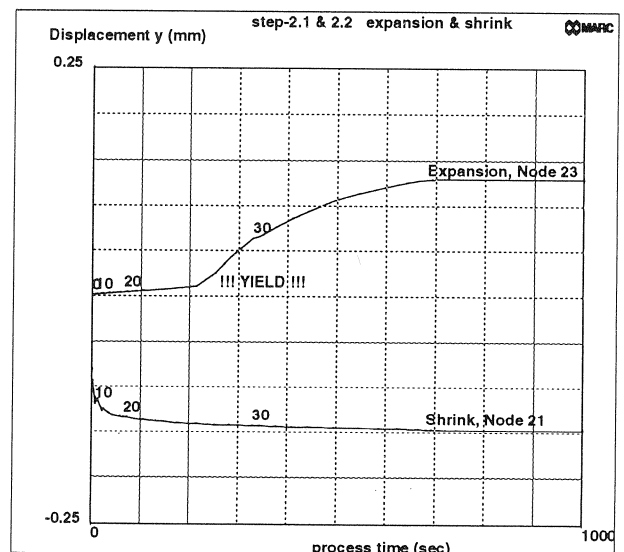


Fig.1-4 半径方向変位の履歴
(凝固膨張および凝固収縮)

【特集 2】 大ひずみ粘弾性球の衝突解析 **

2.1 大ひずみ粘弾性

Fig.2-1に3要素からなるMaxwellの粘弾性モデルを示します。このモデルに瞬間的に伸びを与え、それを一定に保持する条件を考えます。瞬間的にはダッシュポットは剛で変形を生じないので、2本のバネ E_e と E_i が並列($E_e + E_i$)で荷重を発生させます。しかし、時間の経過と共にダッシュポットが伸び、バネ E_i の荷重は時間 $t = \infty$ で0まで低下します。このダッシュポットの時間的な特性を示すのが粘性係数 η_{ri} (あるいは緩和時間 T_{ri})です。 T_{ri} はいわゆる一次遅れ系の時定数であり、今回の例では E_i で発生していた荷重が $1/e$ に低下するまでの時間を表します。この緩和の過程を式で表すと以下ようになります。ここでは変位が一定なので、このバネ定数の変化の式は荷重の変化を表すこととなります。

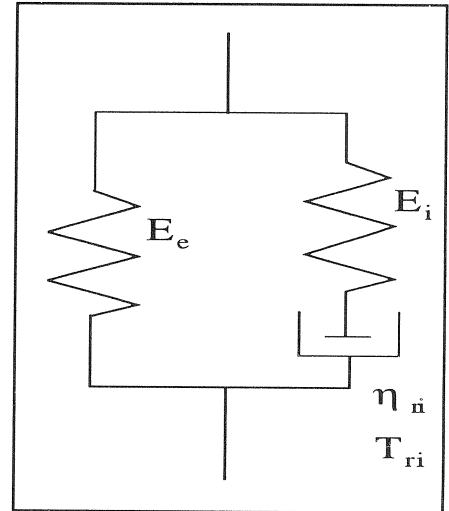


Fig.2-1 Maxwell モデル

$$E(t) = E_e + E_i \exp(-t/T_{ri}) \quad \dots \dots (1)$$

一方、MARC*プログラムでは、大ひずみ粘弾性解析のためにVISCELMOONとVISCELOGDENが用意されています。それぞれ、ゴム材料等の非線形大ひずみ弾性をモデル化するMOONEYおよびOGDENを粘性領域に拡張したものです。これらの機能ではエネルギー関数 W を用いて瞬間弾性を定義し、これが緩和時間 λ で低減するという仮定が用いられています。Fig.2-1のような3要素モデルでは以下ようになります。

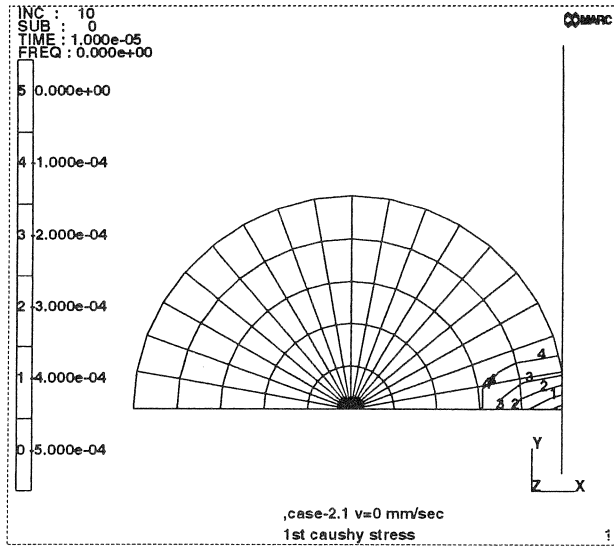
$$W = W_{\infty} + \delta W_0 \exp(-t/\lambda) \quad \dots \dots (2)$$

これを先のMaxwellモデルの緩和関数(1)式と比べてみましょう。 W_{∞} は E_e に対応するもので $t = \infty$ において落ち着く弾性係数を表します。また δW_0 は $t=0$ におけるエネルギー関数 W_0 に係数 δ を乗じたもので、 E_i に対応します。すなわち、 $t = \infty$ では0に落ちてしまう緩和分の弾性を表しています。Maxwellモデルの $t=0$ における瞬間弾性率は既に説明したように $E_e + E_i$ でしたから、係数 δ は $E_i / (E_e + E_i)$ に相当する値だということがわかります。また緩和時間 λ は(1)式の緩和時間 T_{ri} と同じです。

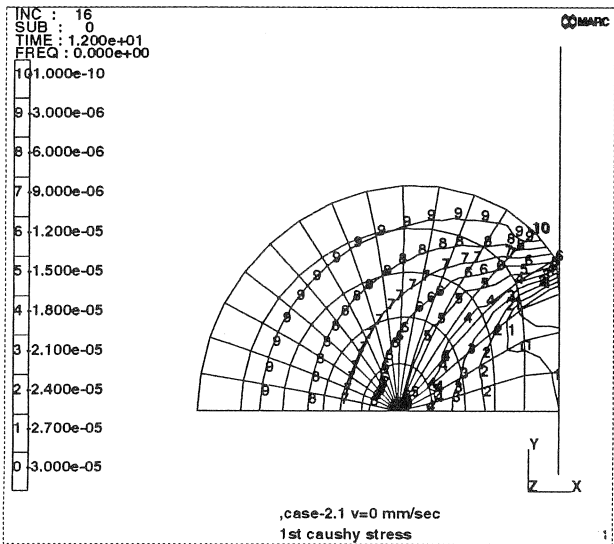
2.2 大ひずみ粘弾性球の衝突解析

大ひずみ粘弾性を有する球が、重力を受けながら剛な壁に衝突する解析を行いました。粘性の効果が支配的であれば球は反発せずに重力で壁に付着し、また、弾性の効果が支配的であれば反跳と落下を繰り返すということは容易に想像できます。ここでは半径10mm、比重1.02の球を考えました。弾性は線形とし、縦弾性係数にして 0.01kg/mm^2 相当となるようにOGDENモデルのエネルギー関数を決めました。粘性についてはVISCELOGDENを用いて、緩和係数 $\delta = 0.999$ 、緩和時間 $\lambda = 0.1\text{sec}$ としました。重力加速度は 9800mm/sec^2 で x 方向です。

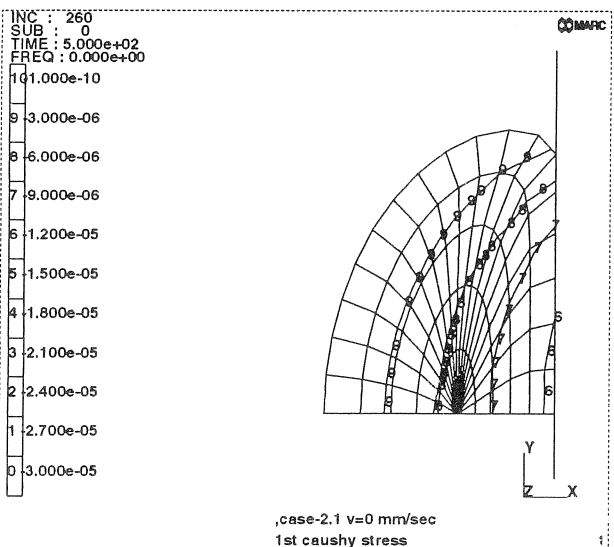
Fig.2-2に衝突速度 $V=0$ の場合の変形履歴を示します。500secの間に徐々に球が変形し、壁に付着することがわかります。図中には重力方向(x 方向)の応力分布をあわせて示します。 $t \doteq 0$ では接触点近傍に局所的な応力が発生しています。しかし、緩和時間が0.1secと短いのでこの応力はすぐに減衰し、変形の本質には影響しません。しかしそれ以降の時刻における図からわかるように球全体には重力と釣り合うような定常的な応力場が存在します。これによって球の変形は進み、残存する弾性と釣り合う状態で落ち着きます。尚、重力は体積に加わる荷重であるので、変形形状に応じて荷重を更新するためFOLLOW FOR(従動荷重)のオプションを使用しています。



t = 0 sec



t = 12 sec



t = 500 sec

Fig.2-2 重力下における粘弾性球の衝突
(衝突速度：静的 $v = 0$) , X方向応力分布
Deformation of Viscoelastic Sphere
Under Gravity Load (Static) , Stress XX

最後に Fig.2-3 は初速度を高速 ($v = 200\text{mm/sec}$) とした結果です。球はほとんど弾性的な挙動を示し、反跳と落下を繰り返します。図からわかるように、球は約 1mm 沈み込み、反跳して約 2mm の高さに達した後、重力によって再び落下します。反跳時の到達高さは、運動エネルギーと位置エネルギーを等置して得られる高さ $h = v^2 / 2g = 2.0\text{mm}$ にほぼ一致します。

この種の解析では時間の経過と共に、球の弾性が急激に失われていくので、不安定になりがちです。レイリー減衰の形で数値減衰 γ を与えるのが一般的な対策ですが、粘弾性による減衰に比べ無視できる程度にしないと、過剰な減衰となり結果を損ないます。ここでは慎重に値を選定し $\gamma = 0.1$ としました。一般には $\gamma = 1$ とすることによって Δt 以下の周期の雑音を防止できると言われており、その 1/10 の値です。

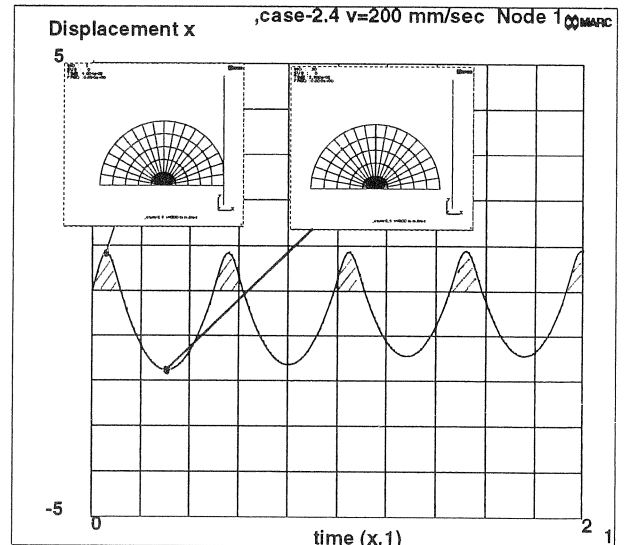


Fig.2-3 球中心の変位履歴
(衝突速度： $v = 200\text{mm/sec}$)
Displacement of Sphere Center
(High Speed Dynamic)

* MARC プログラムは日本マーク株式会社殿の製品です。

** 小林・小山, 大ひずみ粘弾性解析の応用例, 第15回 MARCユーザーズ・ミーティング事例集, pp103-109, 日本マーク株式会社, 1995.