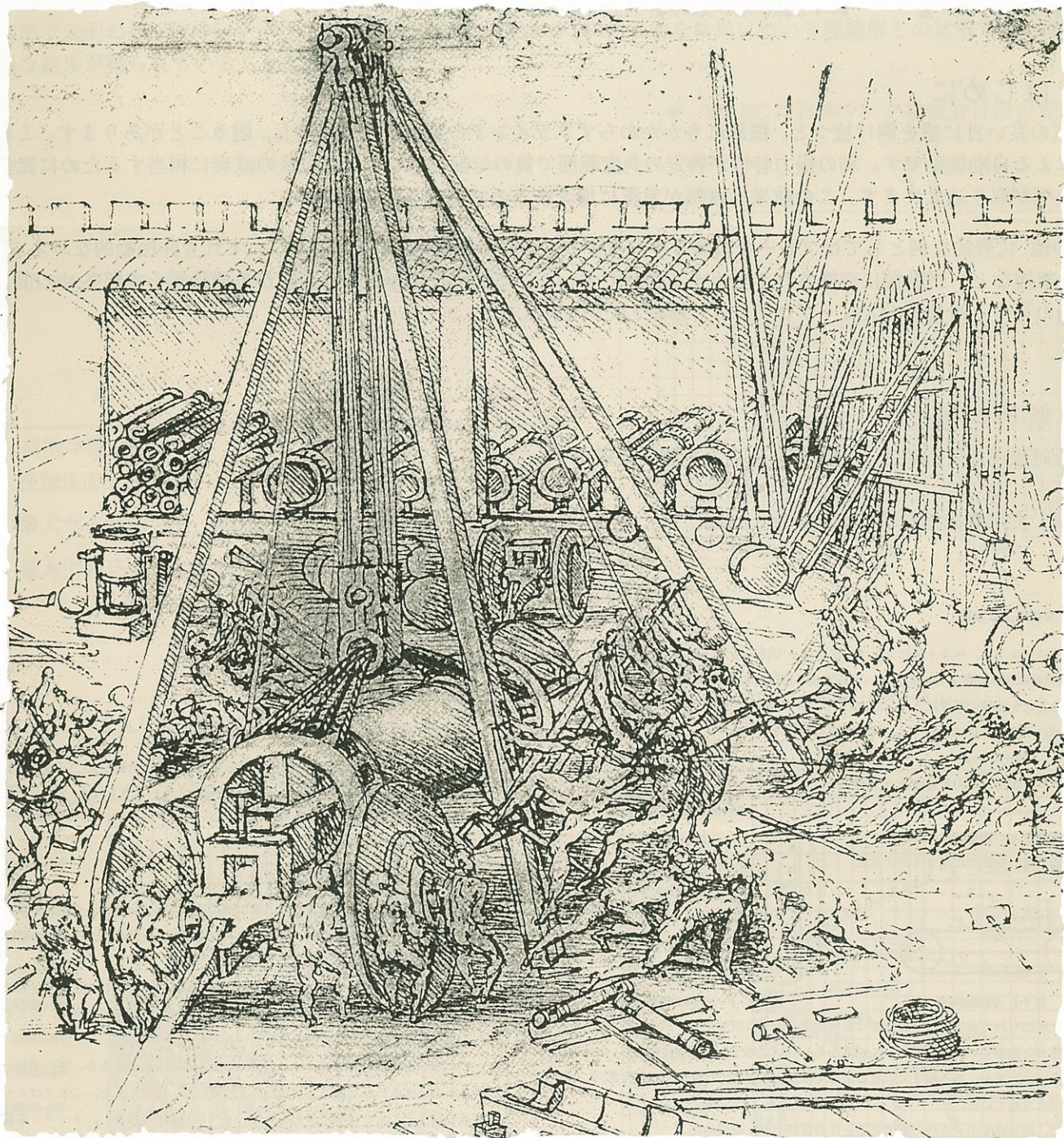


Mech D & A News

Mechanical Design And Analysis Co.

May 1995



【特集】 1. 自励振動の解析 Self-excited Vibration

2. 接触による応力集中 Hertz's Contact Stress

当社では、実用設計の分野の中から興味深い問題を選び、構造解析の適用方法を紹介する企画を開始致しました。Mech D & A News と題し、年 4 回程度の発行を計画しております。

入力データと解説書の頒布も行っておりますので、巻末を参照下さい。

【特集 1】 自励振動の解析

1.1 はじめに

天気の良い日に窓を開け放つと、微風にもかかわらずブラインドの羽が大きく振動し、困ることがあります。これは流体力による自励振動です。羽の揚力特性が特定の角度範囲で負の勾配を示し、これが負の減衰に相当するために流体からエネルギーが取り込まれます。この結果、振幅が急激に増大するのです。

この他、代表的な例としてはブレーキの鳴きやバイオリンの弦の振動が挙げられます。いずれも非振動的なエネルギー(流体力・摩擦など)が励振に変換されて発生する振動です。ここでは国枝正春先生の著書から理論解を参照させて頂き、自励振動の発生と対策を MARC* プログラムで解析した例を示します。

1.2 解析対象

解析対象は以下のような摩擦による自励振動の問題です。

国枝, 実用機械振動学, 理工学社, 1990.

8.2 摩擦による振動

図 8-2 のベルトは、ベルト車によって一定速度 v で送られている。ベルト上の質量 m の物体はばね定数 k のばねによって固定壁に結ばれている。ばねが自由長になっているときを座標の原点にとり、図のように、 m の動きを表わす座標 x を定める。

m とベルト表面とはたらくクーロン摩擦力を F とすると

$$m\ddot{x} + kx = F \quad (8.1)$$

m とベルト表面との相対速度を v_r とすると

$$v_r = v - \dot{x} \quad (8.2)$$

相対速度をもつ物体間にはたらくクーロン摩擦力は、実験的に図 8-3 のように

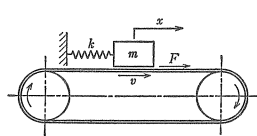


図 8-2 摩擦励振機構

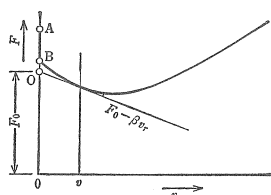


図 8-3 クーロン摩擦特性

なることが知られている。図中の点 A は静摩擦力、点 B は相対すべりが始まる直前の動摩擦力を表わす。図のように、 v_r が 0 からしだいに増すと、摩擦力はしだいに減り、すべり速度が、ある値までになると、それ以上の速度では摩擦力は増大傾向に転ずるとされている。

そこで、相対速度が v 近傍の値であるときの摩擦力は、近似的に

$$F = F_0 - \beta v_r \quad (8.3)$$

で表わすことができる。ただし、 F_0 は図中の点 O における摩擦力、 β は摩擦力と相対速度との関係の線において相対速度が v である点の傾斜を表わす値で、式 (8.3) の表現では正の値をとる。

式 (8.2)、(8.3) を式 (8.1) に代入すると

$$m\ddot{x} + kx = F_0 - \beta(v - \dot{x})$$

または

$$m\ddot{x} - \beta\dot{x} + kx = F_0 - \beta v \quad (8.4)$$

これを解くと、 D, φ を初期条件で決まる定数として

$$x = \frac{F_0 - \beta v}{k} + D e^{\frac{1}{2m}\beta t} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} t + \varphi \right\} \quad (8.5)$$

この式から明らかなように、 β は正であるから振動は発散する。すなわち、初期条件に従って物体に振動が起こると、振幅は時間とともに大きくなる。クーロン摩擦の特性に起因するこの種の振動を摩擦振動あるいはスティック スリップ振動という。発生する振動の振動数 f は

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \quad (8.6)$$

であり、根号内の第 2 項はふつう、第 1 項に比べて小さいので、発生振動数は $m \sim k$ 系の固有振動数にはほぼ等しい。一般に、自励振動の振動数はほとんどの場合、系の固有振動数に等しいのである。

式 (8.4) からわかるように、この種の自励振動の運動方程式は、形式的に減衰自由振動の式の右辺第 2 項である減衰項の係数が負になったものである。そこで、これを負の減衰をもつ自由振動であるということができる。

この種の自励振動を防ぐには、自励力の発生機構を取り去るか、正の減衰を付与するかのいずれかが基本的方策になる。前者について考えると、ここではクーロン摩擦の特性そのものに問題があるから、すべり面を油で潤滑し、クーロン摩擦をなくせばよい。後者については、図 8-2 に示すばねにダンパを並列に取り付ければよく、取り付けるダンパの減衰係数を c とすると、 $\beta > c$ の範囲では、発散の程度は c が大きいほど小さくなるが、長時間をかけて振動は発散する。 $\beta = c$ で振動は定常的となり、初期条件で決まる一定振幅で振動は持続する。 $\beta < c$ になると、初期条件によって振動が発生しても、時間とともに振動は減衰し、ついには消滅する。

ここでは以下の数値を適用し、上記 (8.5) 式を計算します。

$$\left. \begin{array}{l} \text{バネ定数 } k = \pi^2 = 9.8696 \frac{\text{kg}}{\text{mm}} \\ \text{質量 } m = 0.25 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{mm}} \end{array} \right\} \text{固有振動数 } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1\text{Hz} \text{ となります。}$$

$$\text{初期摩擦力 } F_0 = 10 \text{ kg}, \quad \text{ベルト速度 } v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}, \quad \text{クーロン摩擦特性の勾配 } \beta = 0.1 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}}{\text{mm}}$$

$t=0$ で $x=0$, $\dot{x}=0$ として(8.5)式を計算すると、変位は $x=1.003\{1+e^{0.2t} \cos(2\pi t+\pi)\}$ となります。

明らかなように、右辺の e の項が時間による振幅の増大を表します。

1.3 解析結果

理論解と整合させるため、一質点系の解析モデルを使用しました。SPRINGS と MASSES を用いてバネと質量を定義します。理論解の説明にあるように、 β は負の減衰定数と解釈できるので、単に SPRINGS の減衰定数に $-\beta$ を入力すればこの問題は解析できます。Fig.1-1 に質点の変位履歴を示します。上記の発散を示す理論解に一致する結果が得られました。

しかし、実用の問題では、この方法は不十分です。何故なら SPRINGS で入力するダッシュポット型の減衰は、バネ系によるモデル化を前提としているからです。一般の連続体のモデルでは、ダッシュポット型の減衰ではなく、臨界減衰比やレイリー減衰の形で要素に減衰を与えるのが通常です。上記の β をこれらの要素減衰にそのまま入力することはできません。

そこで今回の検討では、(8.3) 式のような速度に依存した外力の形で、 β を解析に反映させる方法を検討しました。この方法であれば、個々の節点の異なる条件 (摩擦特性・速度など) を直接取り扱うこともできるので、実用的で発展性があります。ユーザ・サブルーチン FORCDT の中で速度を参照し、外力を定義する方法を今回は採用しました。Fig.1-2 に結果を示します。Fig.1-1 と一致する結果が得られました。

次は自励振動の対策です。有効な対策の1つは、 β を上回る正の減衰を与えることです。ここでは少し工夫して、変位振幅が 1.5mm を越えると $c=\beta$ なる減衰が作用するような条件を考えてみました。ユーザ・サブルーチン USPRNG を用いて、この変位に依存する減衰を定義しています。結果は Fig1-3 の通りです。変位振幅が成長して c が作用をはじめると、 β の効果が相殺され定常的な振動状態となることがわかります。以上、非常に簡単な例ですが、自励振動の発生と対策を解析した結果です。

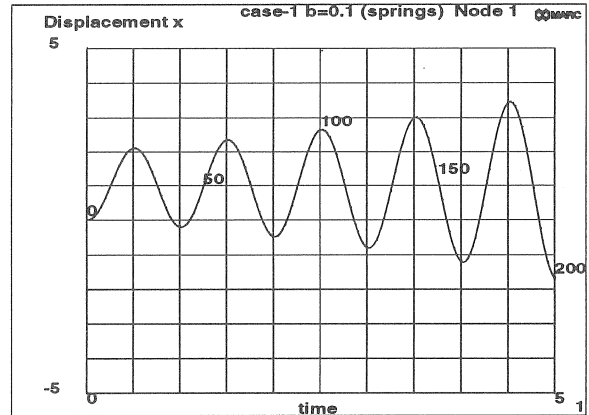


Fig.1-1 自励振動の発 (負の減衰による)

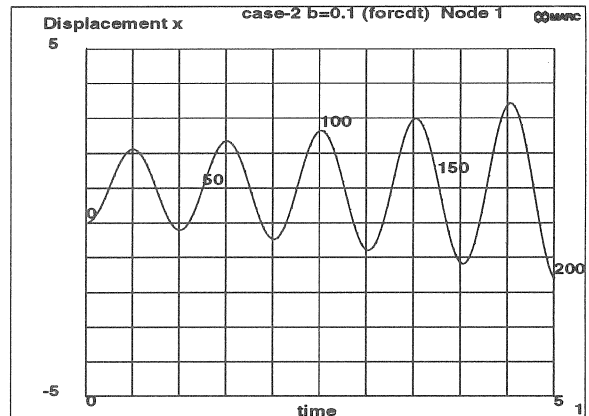


Fig.1-2 自励振動の発生 (速度依存の外力による)

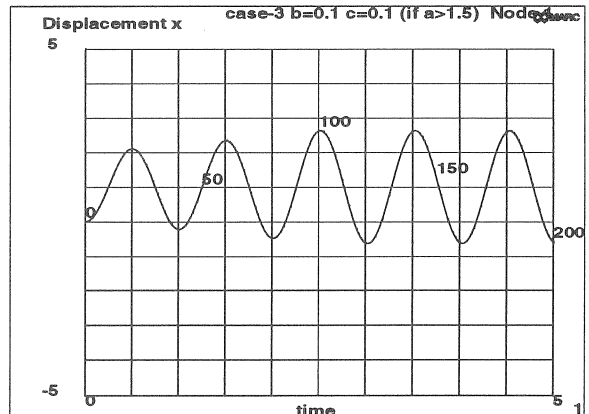


Fig.1-3 自励振動の抑制 (正の減衰の付与)

* MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。

【特集 2】 接触による応力集中

2.1 はじめに

曲面と曲面の接触では、接触を生ずる領域が曲率によって限定されるため、接触面では局所的に高い応力が発生します。この問題は歯車やベアリングの歯面の設計だけでなく、最近ではマイクロ加工の分野等でも重要な課題です。この種の問題を扱うには、弾性の範囲であればヘルツ (Hertz's) 応力の理論がよく知られています。しかしこの理論を実用の問題に適用すると、往々にして困難にぶつかります。

例えば、半径 1 mm の球を平面に 1 グラムの力で押しつける問題を考えます。材料に鋼を想定した場合、ヘルツ応力の理論によれば接触範囲は僅かに数 μm の領域に限られることがわかります。しかしこの結果、応力は降伏条件に近い値となってしまう。またせん断応力の効果によって、ミゼス相当応力の最大値が表面ではなく部材内部で生ずるのも厄介です。ICの製造工程では、外観が無傷であるにもかかわらず、内部に損傷があるといったことが問題になることも聞きます。この問題を FEM ではどのように扱うことができるでしょうか？ MARC* プログラムを使用して以下にその手順を紹介いたします。

2.2 解析対象

下記にヘルツ応力の理論解を示します。出典は機械工学便覧 (新版) です。図中、 $R_A=1\text{mm}$, $R_B=\infty$ とし、球と平面の接触を考えました。荷重は $P=0.001\text{kg}$ です。材料は鋼を想定し、 $E_A=E_B=20000\text{ kg/mm}^2$, $\nu_A=\nu_B=0.3$ としました。この理論解の計算結果は、FEM の結果と合わせて次項に示します。

b. ヘルツの公式 ヘルツの公式 (Hertz's formula) は任意の曲面と曲面の弾性体の接触に適用できるが、ここでは、図 210 に示すような球面と球面、円柱と円柱の場合のみを示す。いずれの場合にも曲率半径 R は、凸面のとき正、凹面のとき負、平面のとき無限大とする。

曲率半径 R_A, R_B の二つの球面が垂直力 P で押し付けられると接触面は半径 a の円形になり、接触圧力を $p=p_{\text{max}} \times \sqrt{1-(r/a)^2}$ 、両球の接近量を δ とし、最大せん断応力 τ_{max} は接触面の中央直下の z_0 だけ離れた物体内部に生じ、

$$a = \sqrt[3]{\frac{3P}{4} \left(\frac{1-\nu_A^2}{E_A} + \frac{1-\nu_B^2}{E_B} \right) / \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right)}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9P^2}{16} \left(\frac{1-\nu_A^2}{E_A} + \frac{1-\nu_B^2}{E_B} \right)^2 \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right)}$$

$$p_{\text{max}} = 3P/2\pi a^2$$

$$\tau_{\text{max}} = 0.31p_{\text{max}}, \quad (z_0 = 0.47a, \text{ ただし } \nu = 0.3)$$

で、最大引張応力は接触縁の半径方向に生じ $(1-2\nu)p_{\text{max}}/3$ である。

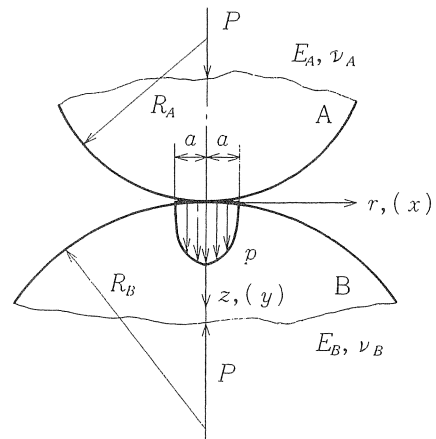


図 210 球面と球面、または円柱と円柱の間の接触

日本機械学会, 機械工学便覧 (新版), p. A4-109, 1992.

2.3 解析結果

Fig2-1 に解析モデルを示します。軸対称要素を使用したモデルで、図中の左側が球の一部、右側が平面の一部を表します。球の直径 1mm に対して予想される接触半径 a は $4\mu\text{m}$ と非常に小さいので、球および平面の断面から、ほぼ正方形に接触部の近傍を切り出しました。正方形の一辺は 0.01mm です。すなわち、接触半径 a に対して約 2.5 倍の寸法を有する部分モデルということになります。R. J. Roark の Formulas for Stress & Strain (6th Ed. McGraw-Hill, 1989) によれば、変形の 50% は $1.2a$ 、また 90% は $7a$ の領域に収まるという記述があるので、この $2.5a$ の規模が乱暴というわけではありません。8 割方の正解を狙うものとします。

球と平面の間にはGap要素を配置しました。Fig.2-1では球と平面を離して描画していますが、実際には初期状態において中心軸上の1点で両者は接しています。Gap量の設定の精度が解の精度を左右するので、ここではユーザサブルーチンGAPUの中で各Gap要素の位置における球と平面のクリアランスを計算し、これをGap量として正確に与えました。

尚、Gap要素ではなくCONTACT機能に慣れていらっしゃる皆様も多いと思います。しかしCONTACT機能では、接触距離の判定に節点座標値を用いるので、この種の微妙な問題で精度を確保するのは容易ではありません。但し座標値の計算・貫通チェック・荷重の載荷方法等を吟味することにより、Gap要素と同等の精度で解を求めたサンプルも用意しておりますので、巻末を参照下さい。

Fig.2-2に平面側のX方向応力、Fig.2-3に同じくミゼス相当応力の分布を示します。ミゼス相当応力は、接触部直下の物体内部で表面の約2倍の値を示すことがわかります。Table 2-1に代表的な結果について理論解との比較を示します。ほぼ妥当な結果が得られていることがわかります。

* MARCは日本マーク株式会社製の製品です。

Table 2-1 ヘルツ応力の理論解とFEMの比較

| 項目 | 理論解 | FEM |
|--|----------------------|----------------------|
| 接触半径 a[mm] | 4.1×10^{-3} | 4.2×10^{-3} |
| 接触圧力 ρ_{max} [kg/mm ²] | 29 | 30 |
| 最大せん断応力 τ_{max} [kg/mm ²] | 8.9 | 9.7 |
| 最大引張応力 [kg/mm ²] | 3.8 | 3.9 |

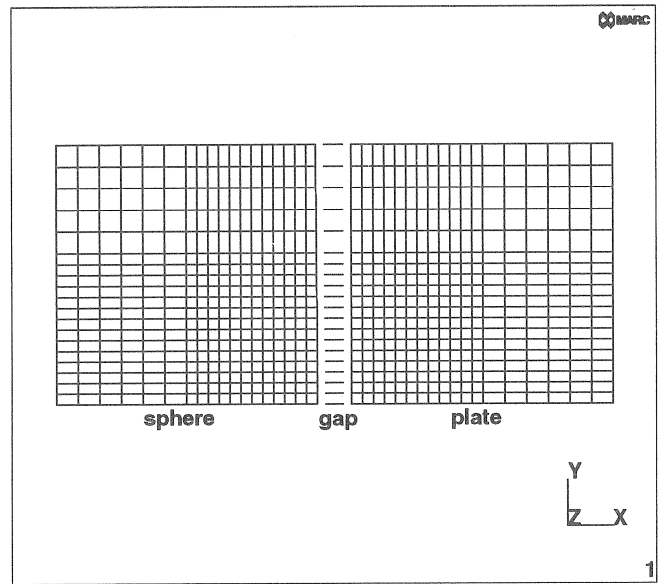


Fig.2-1 解析モデル

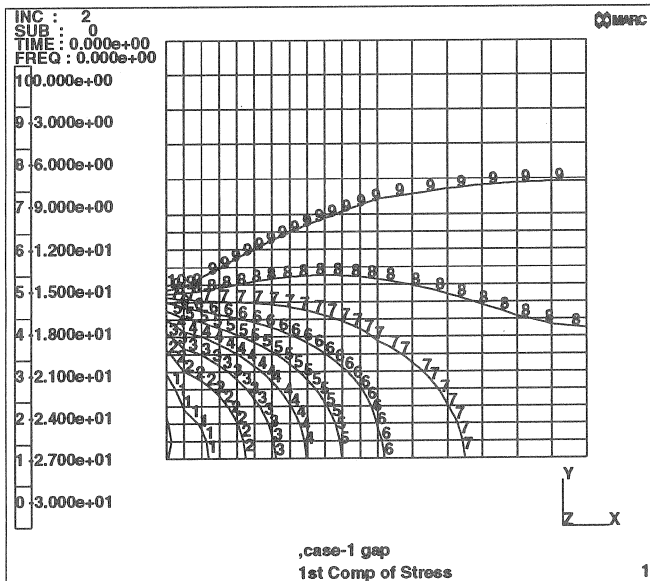


Fig.2-2 X方向応力

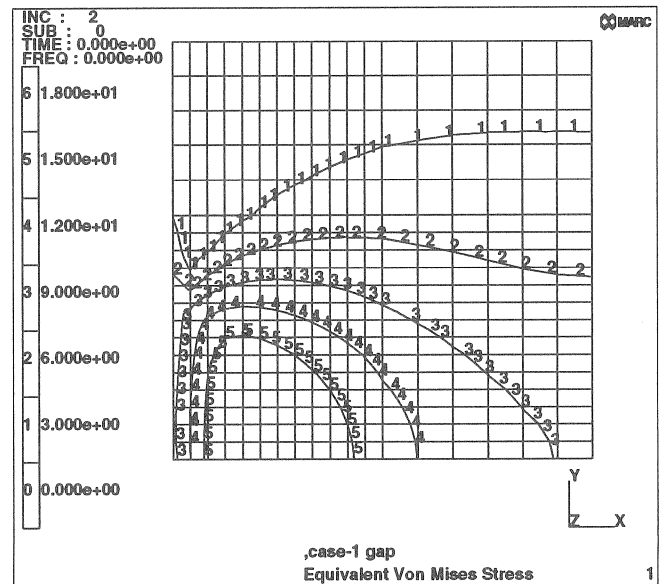


Fig.2-3 ミゼス相当応力